
Дж. МИЛНОР

ВВЕДЕНИЕ
В АЛГЕБРАИЧЕСКУЮ
K-ТЕОРИЮ

ПРОЕКТИВНЫЕ МОДУЛИ И $K_0 A$
КОНСТРУКЦИЯ ПРОЕКТИВНЫХ МОДУЛЕЙ
ГРУППА УАЙТХЕДА $K_1 A$
ТОЧНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ, СВЯЗАННАЯ С ИДЕАЛОМ
ГРУППЫ СТЕЙНБЕРГА И ФУНКТОР K_2
ПРОДОЛЖЕНИЕ ТОЧНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ
СЛУЧАЙ КОММУТАТИВНОЙ БАНАХОВОЙ АЛГЕБРЫ
УМНОЖЕНИЕ $K_1 A \otimes K_1 A \rightarrow K_2 A$
ВЫЧИСЛЕНИЯ В ГРУППЕ СТЕЙНБЕРГА
ВЫЧИСЛЕНИЕ $K_2 Z$
ВЫЧИСЛЕНИЕ K_2 ДЛЯ ПОЛЯ ПО МАЦУМОТО
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ МАЦУМОТО
ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ДЕДЕКИНДОВЫХ КОЛЬЦАХ
ГОМОМОРФИЗМ ПЕРЕНОСА
СИМВОЛЫ НОРМЕННЫХ ВЫЧЕТОВ
ЧИСЛОВЫЕ ПОЛЯ
НЕПРЕРЫВНЫЕ СИМВОЛЫ СТЕЙНБЕРГА



INTRODUCTION TO
ALGEBRAIC K -THEORY

by

JOHN MILNOR

PRINCETON UNIVERSITY PRESS

and

UNIVERSITY OF TOKYO PRESS

PRINCETON, NEW JERSEY

1971

Дж. МИЛНОР

ВВЕДЕНИЕ
В АЛГЕБРАИЧЕСКУЮ
K-ТЕОРИЮ

Перевод с английского
Ю. И. МАНИНА

ИЗДАТЕЛЬСТВО • «МИР» • МОСКВА • 1974

Автор книги хорошо знаком советскому читателю. В переводе на русский язык уже выходили его книги «Теория Морса» («Мир», 1965), «Теорема об h -кобордизме» («Мир», 1969), «Особые точки комплексных гиперповерхностей» («Мир», 1971) и др. Он зарекомендовал себя не только как крупный ученый, но и как мастер исключительно наглядного и ясного изложения новых идей в математике.

Данная книга посвящена новой ветви алгебры, в которой вводятся и изучаются алгебраические аналоги функторов K_i , сыгравших столь большую роль в алгебраической топологии. Прослежены связи этих конструкций с теорией чисел и топологией.

Книга интересна математикам различных специальностей, особенно алгебраистам и топологам. Она доступна аспирантам и студентам старших курсов университетов.

Редакция литературы по математическим наукам

© Перевод на русский язык, «Мир», 1974

М $\frac{20203-007}{041(01)-74}$ 7-74

ОТ ПЕРЕВОДЧИКА

K -функтор был впервые определен Гротендиком в 1957 году в его рукописи, которая содержала первое алгебраическое доказательство (и значительное обобщение) теоремы Римана — Роха — Хирцебруха. По Гротендику $K(X)$ — это группа значений универсальной аддитивной функции, определенной на когерентных пучках на гладком алгебраическом многообразии X . Впрочем, было очевидно, что хорошо известные ранее кольца представлений, кольца Витта классов квадратичных форм и т. п. являются родственными конструкциями.

Функтор K был затем быстро перенесен в топологию и в работах многих авторов, в особенности Атьи, Хирцебруха, Адамса, получил очень сильные приложения, сделав возможным решение недоступных ранее задач. Кроме того, стало очевидным, что эта поразительная по простоте конструкция открывает новые горизонты в понимании старых проблем анализа (индекс эллиптических операторов), топологии (экстраординарные теории гомологий), теории представлений групп и др.

Между тем изучение алгебраических аналогов K -теории шло медленнее и с гораздо меньшим эффектом. Одним из главных препятствий, не преодоленным полностью, до недавнего времени было следующее обстоятельство. Для топологии очень важно, что наряду с обычной группой $K(X) = K^0(X)$ можно ввести группы $K^{-n}(X)$ для всех $n \geq 0$ как (несколько уменьшенные) группы K^0 для n -кратной надстройки X . Между тем в алгебре (точнее в категориях колец или аффинных схем, или схем) до сих пор не найдено адекватного аналога надстройки, что делает задачу построения функторов K^{-n} (или, в обозначениях этой работы, K_n) и доказа-

тельства их свойств высоко нетривиальной. До последнего времени не было общепринятого определения всех K_n ; разные предложенные определения не были согласованы; часть определений ограничивалась лишь некоторыми значениями n ; в иных вариантах (в том числе в приведенном в этой книге) для каждого n нужно было давать собственное определение. Х. Басс взял на себя труд подвести итоги этого этапа развития теории в обширной монографии, русский перевод которой вышел в издательстве «Мир».

Проясняющие ситуацию результаты Д. Квиллена подробно еще не опубликованы. Однако ясно, что в алгебраической K -теории наступил переломный момент, когда объем накопленной информации и уже обнаруженное богатство связей с топологией и арифметикой привлекают к ней все больше внимания и помогают осознать правильные постановки задач и пути их решения¹⁾.

В этих условиях выход книги Милнора, написанной лаконично, вводящей читателя в K -теорию с азов и показывающей стиль и дух алгебраических аспектов теории на очень содержательных образцах, следует считать весьма своевременным. Особенно ценна эта книга для молодых математиков, которые, имея минимальную общую подготовку, смогут ощутить себя в самой гуще исследований сегодняшнего дня.

Ю. Манин

¹⁾ Осенью 1972 г. в Сиэттле состоялась конференция по алгебраической K -теории. Ее труды в трех больших томах опубликованы издательством Шпрингер (Lecture Notes in Math., vol. 341, 342, 343, Springer, Berlin, 1973). В частности, в первом томе содержится фундаментальная работа Квиллена. Большое внимание уделено сравнению разных определений K_n , приложениям и вычислениям, обзору литературы, задачам. — Прим. перев.

Посвящается Норману Стинроду

ПРЕДИСЛОВИЕ
И ПУТЕВОДИТЕЛЬ ПО ЛИТЕРАТУРЕ

Название «алгебраическая K -теория» относится к тому разделу алгебры, который занимается изучением двух функторов K_0 и K_1 , сопоставляющих ассоциативному кольцу A абелевы группы K_0A и K_1A соответственно. Многие авторы развивали эту теорию, но особенно значительным был вклад Х. Басса, книга которого *Algebraic K-theory* (Benjamin, 1968)¹⁾ остается основным источником информации. Вот подборка еще некоторых работ:

Rim D. S., Modules over finite groups, *Ann. of Math.*, 69 (1959), 700—712.

Swan R., Projective modules over finite groups, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 65 (1959), 365—367.

Bass H., K -theory and stable algebra, *Publ. Math. IHES*, 22 (1964), 5—60.

Bass H., Heller A., Swan R., The Whitehead group of a polynomial extension, *Publ. Math. IHES*, 22 (1964), 61—79.

Bass H., The Dirichlet unit theorem, induced characters, and Whitehead groups of finite groups, *Topology*, 4 (1966), 391—410.

Bass H. (with Roy A.), Lectures on topics in algebraic K -theory, Tata Institute, Bombay, 1967.

Bass H., Murthy M. P., Grothendieck groups and Picard groups of abelian group rings, *Ann. of Math.*, 86 (1967), 16—73.

Swan R., Algebraic K -theory, Lecture Notes in Math., 76, Springer, 1968.

Swan R. (with Evans E. G.), K -theory of finite groups and orders, Lecture Notes in Math., 149, Springer, 1970.

Вассерштейн Л. Н., О стабилизации общей линейной группы над кольцом, *Мат. сб.*, 79 (121), (1969) 405—424.

¹⁾ Русский перевод: Басс Х., Алгебраическая K -теория, «Мир», М., 1973. В дальнейшем все ссылки даются на это издание. — Прим. перев.

Основная цель этих записок — ввести и изучить аналогичный функтор K_2 на ассоциативных кольцах со значениями в абелевых группах. Его определение подсказано работами Р. Стейнберга. С функторами K_1 и K_0 он связан, например, через точную последовательность

$$K_2 a \rightarrow K_2 \Lambda \rightarrow K_2 (\Lambda/a) \rightarrow K_1 a \rightarrow K_1 \Lambda \rightarrow K_1 (\Lambda/a) \rightarrow \\ \rightarrow K_0 a \rightarrow K_0 \Lambda \rightarrow K_0 (\Lambda/a),$$

которую можно построить для всякого двустороннего идеала a в кольце Λ , где $K_2 a$, $K_1 a$ и $K_0 a$ — надлежащим образом определенные относительные группы. Ниже следует список работ о K_2 :

Steinberg R., Générateurs, relations et revêtements de groupes algébriques, Colloq. Théorie des groupes algébriques, Bruxelles, 1962, 113—127.

Стейнберг Р., Лекции о группах Шевалле, «Мир», М., 1974.

Moore C., Group extensions of p -adic and adelic linear groups, *Publ. Math. IHES*, 35 (1969), 5—74.

Matsumoto H., Sur les sous-groupes arithmétiques des groupes semi-simples déployés, *Ann. Sci. Éc. Norm. Sup.*, 4^e série, 2 (1969), 1—62.

Bass H., K_2 and symbols, pp. 1—11 of *Lecture Notes in Math.*, 108, Springer, 1969.

Kervaire M., Multiplicateurs de Schur et K -théorie, pp. 212—225 of *Essays on Topology and Related Topics*, dedicated to G. de Rham (ed. Haefliger A. and Narasimhan R.), Springer, 1970.

Wagoner J., On K_2 of the Laurent polynomial ring, *Amer. J. Math.*, 93 (1971), 123—138.

Birch B. J., K_2 of global fields, *Proc. Symp. in Pure Math.*, 20, AMS, 1970.

Tate J., Symbols in arithmetic, *Proc. Int. Congr. Math. Nice*, v. I, Paris, 1971.

Stein M., Chevalley groups over commutative rings, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 77 (1971), 247—252.

Следует заметить, что разными авторами были предложены также определения K_n для всех $n \geq 0$; см. следующие работы:

Nóbile A., Villamayor O., Sur la K -théorie algébrique, *Ann. Sci. Éc. Norm. Sup.*, 4^e série, 1 (1968), 581—616.

Swan R., Non-abelian homological algebra and K -theory, *Proc. Symp. in Pure Math.*, 17, 88—123, AMS, 1970.

Karoubi M., Villamayor O., Foncteurs K^n en algèbre et en topologie, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 269 (1969), 416—419.

Gersten S., Stable K -theory of discrete rings, I, II, в печати.

Milnor J., Algebraic K -theory and quadratic forms, *Invent. Math.*, 9 (1970), 318—344.

Quillen D., The K -theory associated to a finite field, I (mimeographed), 1970.

Swan R., Some relations between higher K -functors, *J. Algebra*, 21 (1972), 113—136.

Вообще говоря, эти определения попарно не совпадают. Остается еще многое сделать, чтобы выяснить отношения между разными определениями. Отметим также, что функторы K_n для $n < 0$ были определены Бассом (Алгебраическая K -теория, стр. 501 — 507).

Оба функтора K_0 и K_1 важны для топологов. В топологических приложениях в качестве Λ всегда фигурирует групповое кольцо над целыми числами $\mathbb{Z}\pi$, где π — фундаментальная группа изучаемого объекта. Исходным пунктом этой теории было предложенное Дж. Уайтхедом определение *кручения*, связанного с гомотопической эквивалентностью конечных комплексов. Кручение Уайтхеда лежит в некоторой факторгруппе группы $K_1\mathbb{Z}\pi$. Следующий важный шаг был сделан Уоллом. Рассмотрим топологическое пространство A , доминируемое конечным комплексом. Тогда можно определить обобщенную эйлерову характеристику $\chi(A)$, лежащую в $K_0\mathbb{Z}\pi$. Уолл показал, что A имеет гомотопический тип конечного комплекса в том и только том случае, когда $\chi(A)$ — целое число. Зибенман и В. Л. Голо построили аналогичные препятствия в задаче добавления границы к открытому многообразию.

Недавние работы Вагонера и Хэтчера показывают, что функтор K_2 имеет топологические приложения такого же типа. Если задана псевдоизотопия замкнутого многообразия, то препятствие для деформации ее в изотопию лежит в некоторой факторгруппе группы $K_2\mathbb{Z}\pi$. Вот список работ на эту тему:

Wall C. T. C., Finiteness conditions for CW-complexes I, *Ann of Math.*, 81 (1965), 56—59, II, *Proc. Royal. Soc. A*, 295 (1966), 129—139.

Siebenmann L., The structure of tame ends, *Notices Amer. Math. Soc.*, 13 (1966), 862.

Milnor J., Whitehead torsion, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 72 (1966), 358—426.

de Rham G., Maumary S., Kervaire M., Torsion et type simple d'homotopie, *Lecture notes in Math.*, 48, Springer, 1967.

Голо В. Л., Об одном инварианте открытых многообразий, *ИАН СССР, сер. мат.*, 31 (1967), 1091—1104.

Siebenmann L., Torsion invariants for pseudo-isotopies on closed manifolds, *Notices Amer. Math. Soc.*, 14 (1967), 942.

Moss R. M. F., Thomas C. B. (editors), Algebraic K -theory and its geometric applications, *Lecture Notes in Math.*, 108, Springer, 1969.

Wagoner J., Algebraic invariants for pseudo-isotopies, *Proceedings of Liverpool Singularities Symposium II, Lecture Notes in Math.*, 209, Springer, 1971.

Существенный толчок развитию алгебраической K -теории дали работы по проблеме конгруэнц-подгрупп. Это задача о том, каждая ли подгруппа конечного индекса в арифметической группе (например, $SL(n, \Lambda)$, где Λ — кольцо целых чисел в числовом поле) содержит некоторую конгруэнц-подгруппу. Вопрос тесно связан с проблемой вычисления $K_1 \alpha$ для как угодно малых идеалов $\alpha \subset \Lambda$. По этому поводу, кроме указанных выше статей Мура и Мацумото, см. следующие работы:

Mennicke J., Finite factor groups of the unimodular group, *Ann. of Math.*, 81 (1965), 31—37.

Serre J.-P., Groupes de congruence, *Séminaire Bourbaki*, 19 année, 1966—67, n° 330.

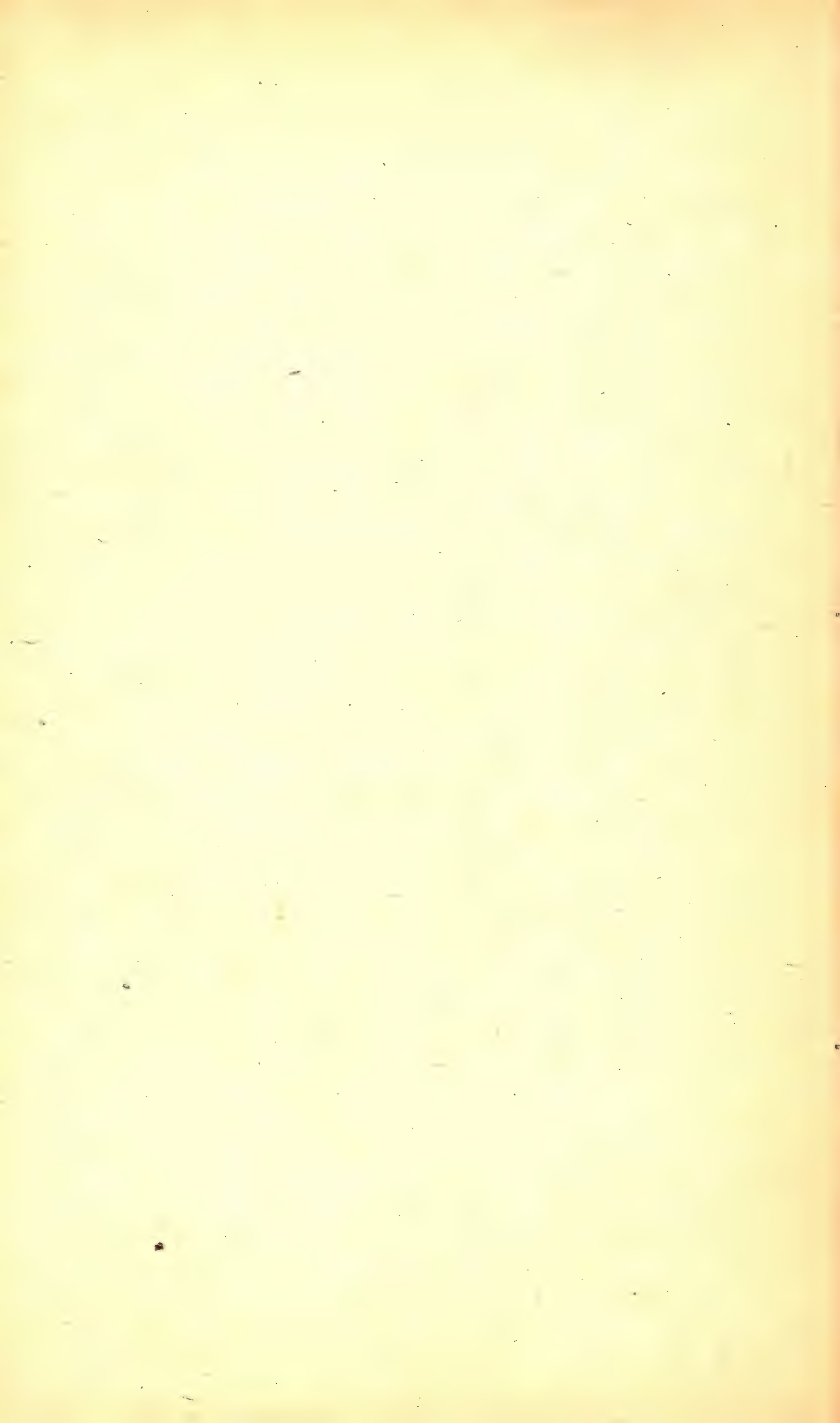
Bass H., The congruence subgroup problem, pp. 16—22 of *Local fields*, Springer, 1967.

Bass H., Milnor J., Serre J.-P., Solution of the congruence subgroup problem for SL_n ($n \geq 3$) and Sp_{2n} ($n \geq 2$), *Publ. Math. IHES*, 33 (1967).

Вассерштейн Л. Н., K_1 -теория и конгруэнцпроблема, *Мат. заметки*, 5 (1969), 233—244.

Serre J.-P., Le problème des groupes de congruence pour SL_2 , *Ann. of Math.*, 92 (1970), 487—527.

Я хочу поблагодарить Х. Басса, Р. Стейнберга и Дж. Тэйта за многочисленные полезные беседы и в особенности за возможность доступа к их неопубликованным работам. Я хочу поблагодарить также Дж. Джоэля за ряд предложений и за предоставление записок лекций (Принстон, 1967), послуживших началом работы над этой рукописью.



§ 1. ПРОЕКТИВНЫЕ МОДУЛИ И $K_0\Lambda$

Слово *кольцо* всегда обозначает ассоциативное кольцо с единицей 1.

Рассмотрим левые модули над некоторым кольцом Λ . Напомним, что модуль M называется *свободным*, если у него существует такая система образующих $\{m_\alpha\}$, что каждый элемент из M однозначно представляется в виде конечной суммы $\sum \lambda_\alpha m_\alpha$. Модуль M называется *проективным*, если существует такой модуль N , что прямая сумма $M \oplus N$ свободна. Равносильное требование: любая точная последовательность $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow M \rightarrow 0$ расщепляется, так что $Y \cong X \oplus M$.

Группой проективных модулей $K_0\Lambda$ называется аддитивная группа, которая описывается следующими образующими и соотношениями. Каждому классу изоморфных конечно порожденных проективных модулей P над Λ отвечает образующая $[P]$; каждой паре таких модулей P, Q отвечает соотношение

$$[P] + [Q] = [P \oplus Q]$$

(ср. доказательство леммы 1.1 ниже).

Ясно, что всякий элемент из $K_0\Lambda$ можно представить в виде разности $[P_1] - [P_2]$ двух образующих. (Можно даже добиться, чтобы P_2 стал свободен, добавив к P_1 и P_2 один и тот же модуль в случае необходимости.) Мы укажем некоторый критерий равенства двух таких разностей.

Нам понадобится еще одно определение. Пусть Λ^r — свободный модуль r -векторов над Λ . Модули M и N называются *стабильно изоморфными*, если существует такое r , что

$$M \oplus \Lambda^r \cong N \oplus \Lambda^r.$$

Лемма 1.1. *Образующие $[P]$ и $[Q]$ группы $K_0\Lambda$ совпадают тогда и только тогда, когда модули P и Q стабильно изоморфны.*

Следовательно, разности $[P_1] - [P_2]$ и $[Q_1] - [Q_2]$ совпадают тогда и только тогда, когда модули $P_1 \oplus Q_2$ и $P_2 \oplus Q_1$ стабильно изоморфны.

Доказательство. Более формальное определение $K_0\Lambda$ таково: это факторгруппа F/R , где F — свободная абелева группа, порожденная образующими $\langle P \rangle$, по одной для каждого класса изоморфных проективных конечно порожденных модулей P , а R — подгруппа, порожденная элементами $\langle P \rangle + \langle Q \rangle - \langle P \oplus Q \rangle$. (Символ $[P]$ тем самым означает класс $\langle P \rangle \bmod R$.) Заметим, что сумма $\langle P_1 \rangle + \dots + \langle P_k \rangle$ в F совпадает с $\langle Q_1 \rangle + \dots + \langle Q_k \rangle$ тогда и только тогда, когда существует такая перестановка π индексов $\{1, \dots, k\}$, что

$$P_1 \cong Q_{\pi(1)}, \dots, P_k \cong Q_{\pi(k)}.$$

Отсюда, в частности, следует изоморфизм

$$P_1 \oplus \dots \oplus P_k \cong Q_1 \oplus \dots \oplus Q_k.$$

Предположим теперь, что $\langle M \rangle \equiv \langle N \rangle \bmod R$. Это означает, что

$$\begin{aligned} \langle M \rangle - \langle N \rangle &= \sum (\langle P_i \rangle + \langle Q_i \rangle - \langle P_i \oplus Q_i \rangle) - \\ &\quad - \sum (\langle P'_j \rangle + \langle Q'_j \rangle - \langle P'_j \oplus Q'_j \rangle) \end{aligned}$$

для некоторых модулей P_i, Q_i, P'_j, Q'_j . Перенесем теперь все члены с минусами по другую сторону от знака равенства. Учитывая предыдущее замечание, получим, что

$$\begin{aligned} M \oplus (\sum (P_i \oplus Q_i) \oplus \sum P'_j \oplus \sum Q'_j) &\cong \\ &\cong N \oplus (\sum P_i \oplus \sum Q_i \oplus \sum (P'_j \oplus Q'_j)) \end{aligned}$$

или, короче, $M \oplus X \cong N \oplus X$, ибо модули в длинных скобках, очевидно, изоморфны. Теперь подберем модуль Y так, чтобы $X \oplus Y$ был свободен, $X \oplus Y \cong \Lambda^r$. Добавляя Y к обеим частям, получим $M \oplus \Lambda^r \cong N \oplus \Lambda^r$. Значит, M и N стабильно изоморфны.

Оставшаяся часть доказательства очевидна. ■

Если кольцо Λ коммутативно, то тензорное произведение над Λ (конечно порожденных проективных) левых Λ -модулей снова является (конечно порожденным) проективным левым Λ -модулем. Положив

$$[P] \cdot [Q] = [P \otimes Q],$$

мы превращаем аддитивную группу $K_0\Lambda$ в коммутативное кольцо. Единицей этого кольца является класс $[\Lambda^1]$ свободного модуля с одной образующей.

Начав вычислять группу $K_0\Lambda$, необходимо задаться двумя вопросами.

Вопрос 1. Является ли каждый конечно порожденный проективный Λ -модуль свободным (или хотя бы стабильно свободным)?

Вопрос 2. Является ли число элементов в некотором базисе свободного модуля инвариантом этого модуля? Иными словами, если $\Lambda^r \cong \Lambda^s$, верно ли, что $r = s$?

Если ответы на оба вопроса положительны, то $K_0\Lambda$, очевидно, является свободной абелевой группой с образующей $[\Lambda^1]$. Это так, например, если Λ — поле, тело или область главных идеалов.

Разумеется, ответы на оба вопроса могут быть отрицательными.

Например, если Λ — кольцо эндоморфизмов конечномерного векторного пространства размерности, большей единицы, то ответ на первый вопрос отрицателен. Для колец эндоморфизмов бесконечномерных пространств ответ на второй вопрос отрицателен. (В первом случае $K_0\Lambda$ — бесконечная циклическая группа, но не порождается $[\Lambda^1]$; во втором случае группа $K_0\Lambda$ нулевая.)

Вот важный пример, когда $K_0\Lambda$ — свободная циклическая группа.

Лемма 1.2. *Если Λ — локальное кольцо, то любой конечно порожденный¹⁾ проективный модуль свободен и $K_0\Lambda$ — свободная циклическая группа, порожденная классом $[\Lambda^1]$.*

Сначала напомним относящиеся сюда определения. Элемент кольца Λ называется *единицей*, если существует такой элемент u , что $uv = vu = 1$. Множество $\Lambda^\times$ всех единиц Λ , очевидно, образует мультипликативную группу.

Кольцо Λ называется *локальным*, если множество $m = \Lambda \setminus \Lambda^\times$ всех неединиц является левым идеалом. В

¹⁾ Ср. Kaplansky I., Projective modules, *Ann. of Math.*, 68 (1958), 372—377.

этом случае оно является также правым идеалом. Действительно, допустим, что некоторое произведение $m\lambda$, $m \in \mathfrak{m}$, $\lambda \in \Lambda$, является единицей. Тогда m имеет правый обратный элемент v , $mv = 1$. Очевидно, v не может принадлежать левому идеалу $\mathfrak{m}$. Но v также не может быть единицей, иначе формула

$$m = m(vv^{-1}) = (mv)v^{-1} = v^{-1}$$

показала бы, что m — также единица.

Это противоречие показывает, что $\mathfrak{m}$ — действительно двусторонний идеал. Факторкольцо $\Lambda/\mathfrak{m}$, очевидно, является полем или телом.

Заметим, что квадратная матрица над Λ обратима тогда и только тогда, когда ее редукция $\text{mod } \mathfrak{m}$ обратима. Для доказательства нужно умножить эту матрицу слева на такую, которая представляет обратную к ней по модулю $\mathfrak{m}$, затем диагонализировать произведение элементарными преобразованиями строк. Таким образом, матрица имеет левую обратную; аналогичным рассуждением строится правая обратная матрица.

Теперь мы можем приступить к доказательству леммы 1.2. Если модуль P конечно порожден и проективен над Λ , можно найти такой модуль Q , что $P \oplus Q \cong \Lambda^n$. Выберем базисы в $P/\mathfrak{m}P$ и $Q/\mathfrak{m}Q$ (как в пространствах над телом $\Lambda/\mathfrak{m}$). Каждый элемент базисов поднимем соответственно в P или Q . Согласно сделанному выше замечанию, полученное множество элементов составит базис модуля $P \oplus Q$. Очевидно, отсюда следует, что P и Q свободны. Так как размерность пространства $P/\mathfrak{m}P$ является инвариантом P , это завершает доказательство. ■

Рассмотрим теперь некоторый гомоморфизм колец

$$f: \Lambda \rightarrow \Lambda'$$

(всегда предполагается, что $f(1) = 1$). Он позволяет построить по любому Λ -модулю M модуль

$$f_{\#}M = \Lambda' \otimes_{\Lambda} M$$

над Λ' . Ясно, что если M конечно порожден или свободен, или проективен, или распадается в прямую сум-

му над Λ , то $f_{\#}M$ соответственно конечно порожден, свободен, проективен, распадается в прямую сумму над Λ' . Это определяет соответствие

$$[P] \mapsto [f_{\#}P],$$

которое продолжается до гомоморфизма абелевых групп

$$f_*: K_0\Lambda \rightarrow K_0\Lambda'.$$

Отметим функториальные свойства:

$$(\text{identity})_* = \text{identity}, (f \circ g)_* = f_* \circ g_*.$$

Пример 1. Пусть Z — кольцо целых чисел. Для любого кольца Λ однозначно определен гомоморфизм

$$i: Z \rightarrow \Lambda.$$

Образом

$$i_*K_0Z \subset K_0\Lambda$$

служит подгруппа, порожденная классом свободного модуля $[\Lambda^1]$. Ядро

$$K_0\Lambda / (\text{подгруппа, порожденная } [\Lambda^1]) = K_0\Lambda / i_*K_0Z$$

называется *группой проективных классов* кольца Λ .

Пример 2. Предположим, что у Λ есть гомоморфизм в поле или тело F . Это всегда так, например, если Λ коммутативно. Тогда мы получим гомоморфизм

$$j_*: K_0\Lambda \rightarrow K_0F \cong Z.$$

В коммутативном случае этот гомоморфизм, очевидно, определяется ядром гомоморфизма j , которое является простым идеалом Λ . Поэтому можно говорить о *ранге* проективного модуля над простым идеалом $\mathfrak{p}$. Если $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{p}'$, то ранги над $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{p}'$ совпадают. Действительно, локализуя область целостности $\Lambda/\mathfrak{p}'$ по идеалу, отвечающему $\mathfrak{p}$ (т. е. присоединив обратные элементы дополнения $\mathfrak{p}$), мы получим локальное подкольцо поля частных кольца $\Lambda/\mathfrak{p}'$, которое гомоморфно отображается в поле частных кольца $\Lambda/\mathfrak{p}$. Лемма 1.2 показывает, что ранги модулей равны. В частности, если Λ — область

целостности, то ранг проективного модуля над Λ не зависит от выбора простого идеала.

В общем случае, фиксируя гомоморфизм $j: \Lambda \rightarrow F$ и пользуясь тем, что j_*i_* — изоморфизм, получаем разложение в прямую сумму:

$$K_0\Lambda = \text{Im } i_* \oplus \text{Ker } j_*.$$

Первое слагаемое есть свободная циклическая группа, а второе изоморфно группе проективных классов кольца Λ .

Заметим, что в коммутативном случае $\text{Ker } j_*$ является идеалом в кольце $K_0\Lambda$. Мы будем обозначать этот идеал символом $\tilde{K}_0\Lambda$ и писать

$$K_0\Lambda \cong Z \oplus \tilde{K}_0\Lambda.$$

Пример 3. Предположим, что Λ разлагается в прямое произведение колец

$$\Lambda_1 \times \Lambda_2 \times \dots \times \Lambda_k.$$

Гомоморфизмы проекции

$$K_0\Lambda \rightarrow K_0\Lambda_i$$

определяют разложение

$$K_0\Lambda \cong K_0\Lambda_1 \times K_0\Lambda_2 \times \dots \times K_0\Lambda_k.$$

Доказательство не представляет трудностей.

Такое разложение существует, например, у коммутативных артиновых¹⁾ колец, которые не локальны. Действительно, так как Λ коммутативно, все нильпотентные элементы образуют идеал. Если Λ не локально, должен существовать элемент λ , который не обратим и не нильпотентен. Из артиновости Λ следует, что последовательность главных идеалов

$$(\lambda) \supset (\lambda^2) \supset (\lambda^3) \supset \dots$$

стабилизируется. Если, скажем, $(\lambda^n) = (\lambda^{n+1}) = \dots$, то $\lambda^n = r\lambda^{2n}$ для некоторого r . Это значит, что $e = r\lambda^n$ —

¹⁾ Кольцо называется артиновым, если любая убывающая последовательность идеалов стабилизируется.

идемпотент ($ee = e$), так что Λ разлагается в произведение

$$\Lambda \cong \Lambda/(e) \times \Lambda/(1 - e).$$

Это разложение нетривиально — из того, что λ не обратим и не нильпотентен, вытекает, что $e \neq 1, 0$. Продолжая этот процесс, получим в конце концов разложение Λ в произведение локальных колец. Поэтому

$$K_0\Lambda \cong Z \times \dots \times Z.$$

Дедекиндовы кольца

Важные примеры колец $K_0\Lambda$ более интересной структуры доставляют дедекиндовы кольца. Мы обсудим их довольно подробно, исходя из несколько нестандартного определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Дедеккиндовым кольцом* (или дедеккиндовой областью) называется такое коммутативное кольцо без делителей нуля, что для любой пары идеалов $a \subset b$ существует идеал c с условием $a = bc$.

(Разумеется, обычное определение равносильно этому. Дальнейшие сведения можно найти в книгах: Зарисский О. и Самюэль П., Коммутативная алгебра, т. I, ИЛ, 1963, Lang S., Algebraic Number Theory, Addison-Wesley, 1970, и Картан Э. и Эйленберг С., Гомологическая алгебра, ИЛ, 1960.)

Замечание 1.3. Кроме тривиального случая $a = b = 0$, идеал c определен однозначно. В самом деле, пусть $bc = bc'$. Выбрав ненулевой главный идеал $b_0\Lambda \subset b$, мы можем представить $b_0\Lambda$ в виде xb и заключить, что $xbc = xbc'$, откуда $b_0c = b_0c'$ и, наконец, $c = c'$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Ненулевые идеалы a, b в дедеккиндовой области принадлежат одному и тому же *классу идеалов*, если существуют такие ненулевые элементы кольца x и y , что $xa = yb$.

Очевидно, классы идеалов кольца Λ образуют абелеву группу относительно умножения, единицей которой служит класс главных идеалов. Символом $S(\Lambda)$ мы

будем обозначать эту группу, а символом $\{a\} \in C(\Lambda)$ — класс идеала a .

Заметим, что $\{a\} = \{b\}$ в том и только том случае, когда Λ -модули a и b изоморфны. Действительно, пусть $\varphi: a \rightarrow b$ — некоторый изоморфизм. Выбирая $a_0 \in a$ и замечая, что $a_0\varphi(a) = \varphi(a_0a) = \varphi(a_0)a$, получаем $a_0b = \varphi(a_0)a$.

Важные примеры дедекиндовых областей строятся так. Пусть F — конечное расширение поля рациональных чисел Q . Элемент поля F называется *целым алгебраическим числом*, если он является корнем многочлена

$$x^k + a_1x^{k-1} + \dots + a_k$$

с коэффициентами $a_i \in Z$.

ТЕОРЕМА 1.4. *Множество $\Lambda = \Lambda(F)$ всех целых алгебраических чисел из F является дедекиндовым кольцом с полем частных F .*

Доказательство этой классической теоремы будет отложено до конца параграфа.

Группа классов идеалов $C(\Lambda(F))$ такого кольца алгебраических целых чисел конечна (см., например, Текке Э., Лекции по теории алгебраических чисел, Гостехиздат, М.-Л., 1940, или Борович З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел, «Наука», 1972), например, у областей $Z[i]$, $Z[\sqrt{-5}]$ и $Z[(1 + \sqrt{-23})/2]$ порядки группы классов идеалов равны 1, 2 и 3 соответственно. Дальнейшие примеры приведены в замечании 3.4.

Проективные модули над дедекиндовыми кольцами допускают следующую классификацию.

ЛЕММА 1.5. *Любой идеал дедекиндова кольца Λ имеет конечное число образующих и проективен над Λ . Любой конечно порожденный проективный модуль над Λ изоморфен прямой сумме идеалов $a_1 \oplus \dots \oplus a_k$.*

Доказательство. Пусть b — ненулевой идеал. Выберем элемент $0 \neq a_0 \in b$, так что $a_0\Lambda \subset b$, и найдем c из равенства $a_0\Lambda = bc$. Образующую a_0 тогда можно выразить в виде $b_1c_1 + \dots + b_kc_k$, где $b_i \in b$, $c_i \in c$. Определим Λ -линейные отображения

$$b \rightarrow \Lambda^k, \quad \Lambda^k \rightarrow b$$

формулами $b \mapsto (bc_1/a_0, \dots, bc_k/a_0)$ и $(x_1, \dots, x_k) \mapsto b_1x_1 + \dots + b_kx_k$. Так как их композиция тождественна на b , последний конечно порожден и проективен.

Любой конечно порожденный проективный модуль P погружается в свободный модуль Λ^k для некоторого k . Проектируя на k -е слагаемое, получаем гомоморфизм $\varphi: P \rightarrow \Lambda$ с ядром $\text{Ker } \varphi \subset \Lambda^{k-1}$. Его образ $\varphi(P) = a_k$ есть идеал и потому проективен; значит, $P \cong \text{Ker } \varphi \oplus a_k$. Индукция по k завершает доказательство. ■

Замечание. Вообще любой конечно порожденный модуль без кручения погружается в Λ^k для некоторого k ; то же рассуждение показывает тогда, что он проективен.

ТЕОРЕМА 1.6 (Штейниц). *Две прямые суммы ненулевых идеалов $a_1 \oplus \dots \oplus a_r$ и $b_1 \oplus \dots \oplus b_s$ изоморфны как Λ -модули в том и только том случае, когда $r = s$ и классы идеалов $\{a_1 \dots a_r\}$ и $\{b_1 \dots b_s\}$ совпадают.*

(Ср. Kaplansky I., Modules over Dedekind rings and valuation rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 72 (1952), 327 — 340.)

В первой части доказательства можно считать, что Λ — любая область целостности. Заметим сначала, что если $a \subset \Lambda$ — ненулевой идеал, то любое Λ -линейное отображение $\varphi: a \rightarrow b \subset \Lambda$ определяет единственный элемент q поля частных кольца Λ с условием

$$\varphi(a) = qa \text{ для всех } a \in a.$$

Чтобы установить это, запишем $a_0\varphi(a) = \varphi(a_0a) = \varphi(a_0)a$ и разделим на a_0 ; это даст $q = \varphi(a_0)/a_0$. Аналогично для любого Λ -линейного отображения

$$\varphi: a_1 \oplus \dots \oplus a_r \rightarrow b_1 \oplus \dots \oplus b_s$$

существует единственная $(s \times r)$ -матрица $Q = (q_{ij})$ с элементами из поля частных, такая, что i -я компонента вектора $\varphi(a_1, \dots, a_r) = (b_1, \dots, b_s)$ имеет вид

$$b_i = \sum q_{ij}a_j$$

для всех $(a_1, \dots, a_r) \in a_1 \oplus \dots \oplus a_r$. Если φ — изоморфизм, эта матрица должна быть обратима, так что

$r = s$. Теперь мы утверждаем, что

$$b_1 \dots b_r = (\det Q) a_1 \dots a_r.$$

В самом деле, для любой образующей $a_1 \dots a_r$ идеала $a_1 \dots a_r$ произведение $(\det Q) a_1 \dots a_r$ можно представить в виде определителя произведения матриц

$$Q \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & a_r \end{pmatrix},$$

i -я строка которого состоит из элементов $q_{ij}a_j$ идеала b_i . Это показывает, что

$$(\det Q) a_1 \dots a_r \subset b_1 \dots b_r.$$

Аналогично

$$(\det Q^{-1}) b_1 \dots b_r \subset a_1 \dots a_r.$$

Умножая эту последнюю формулу на $\det Q$ и сравнивая ее с предыдущей, находим $b_1 \dots b_r = (\det Q) a_1 \dots a_r$. Значит, классы идеалов $\{a_1 \dots a_r\}$ и $\{b_1 \dots b_r\}$ совпадают, что доказывает первую часть теоремы 1.6.

Чтобы установить теперь, что r и класс идеалов $\{a_1 \dots a_r\}$ составляют полную систему инвариантов модуля $a_1 \oplus \dots \oplus a_r$, очевидно, достаточно доказать следующий факт.

Лемма 1.7. Пусть a, b — ненулевые идеалы дедекиндова кольца Λ . Тогда модуль $a \oplus b$ изоморфен $\Lambda^1 \oplus (ab)$.

Если a и b взаимно просты ($a + b = \Lambda$), это можно доказать так. Отобразим $a \oplus b$ на Λ^1 : $a \oplus b \mapsto a + b$. Ядро, очевидно, изоморфно $a \cap b$. Из проективности Λ^1 следует, что точная последовательность $0 \rightarrow a \cap b \rightarrow a \oplus b \rightarrow \Lambda^1 \rightarrow 0$ расщепляется, откуда $a \oplus b \cong \Lambda^1 \oplus (a \cap b)$. Но пересечение $a \cap b$ совпадает с произведением идеалов ab . Действительно, включение $ab \subset a \cap b$ очевидно; кроме того, если $1 = a_0 + b_0$, то любой элемент $x \in a \cap b$ можно представить в виде $x = a_0x + xb_0$, так что $x \in ab$. Тем самым $a \oplus b \cong \Lambda^1 \oplus ab$, что и требовалось.

В общем случае мы воспользуемся дедекиндовостью Λ , чтобы заменить a идеалом, взаимно простым с b . Очевидно, достаточно установить следующее.

Лемма 1.8. Пусть $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ — ненулевые идеалы дедекиндова кольца Λ . Тогда существует идеал $\mathfrak{a}'$, принадлежащий классу $\{\mathfrak{a}\}$ и взаимно простой с $\mathfrak{b}$.

Для доказательства нам понадобятся два стандартных свойства дедекиндовых колец.

Лемма 1.9. Любой ненулевой идеал дедекиндовой области Λ однозначно представляется в виде произведения максимальных идеалов.

В самом деле, пусть $\mathfrak{m}_1 \supset \mathfrak{a}$ максимален; тогда $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}_1 \mathfrak{a}_1$ для некоторого идеала $\mathfrak{a}_1$, затем, аналогично, $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{m}_2 \mathfrak{a}_2$ и так далее, где $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \dots$. Эта последовательность должна стабилизироваться, потому что Λ нётерово в силу леммы 1.5. Получившееся разложение однозначно. Действительно, если $\mathfrak{m}_1 \dots \mathfrak{m}_k = \mathfrak{m}'_1 \dots \mathfrak{m}'_l$, то $\mathfrak{m}'_1 \supset \mathfrak{m}_1 \dots \mathfrak{m}_k$; пользуясь простотой $\mathfrak{m}'_1$, получаем отсюда, что $\mathfrak{m}'_1$ содержит один из идеалов $\mathfrak{m}_i$ и потому совпадает с ним. Индукция по $\max(k, l)$ с использованием замечания 1.3 доказывает единственность. ■

Лемма 1.10. Для любого ненулевого идеала $\mathfrak{a}$ дедекиндова кольца Λ факторкольцо $\Lambda/\mathfrak{a}$ является кольцом главных идеалов (обычно с делителями нуля).

Доказательство. Пусть $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_k$ — различные простые идеалы, содержащие $\mathfrak{a}$. Покажем сначала, что каждый из $\mathfrak{m}_i$ по модулю $\mathfrak{a}$ становится главным. Пусть x_1 — элемент кольца, принадлежащий $\mathfrak{m}_1$, но не $\mathfrak{m}_1^2$. Так как идеалы $\mathfrak{m}_1^2, \mathfrak{m}_2, \dots, \mathfrak{m}_k$ попарно взаимно просты (использовать 1.9), существует такой элемент кольца y_1 , что

$$\begin{aligned} y_1 &\equiv x_1 \pmod{\mathfrak{m}_1^2}, \\ y_1 &\equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}_j} \quad \text{при } j > 1 \end{aligned}$$

(китайская теорема об остатках; см., например, Ленг С., Алгебра, «Мир», М., 1968). Значит, идеал, порожденный y_1 и $\mathfrak{a}$, содержится в $\mathfrak{m}_1$, но не в $\mathfrak{m}_1^2$ и не в других максимальных идеалах. Из леммы 1.9 следует, что он должен совпадать с $\mathfrak{m}_1$.

Это показывает, что $\mathfrak{m}_1$ — главный идеал по модулю $\mathfrak{a}$. Но любой идеал в $\Lambda/\mathfrak{a}$ разлагается в произведение

максимальных идеалов. Это завершает доказательство леммы 1.10. ■

Теперь мы готовы к доказательству леммы 1.8. Для данных ненулевых идеалов $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ выберем ненулевой элемент $a_0 \in \mathfrak{a}$ и определим r из уравнения $ra = a_0\Lambda$. Применив 1.10 к идеалу $r \bmod \mathfrak{b}r$, получаем, что r порожден $\mathfrak{b}r$ и некоторым элементом x_0 . Умножая на $\mathfrak{a}$ и деля на a_0 равенство

$$r = \mathfrak{b}r + x_0\Lambda,$$

находим

$$\Lambda = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}x_0/a_0.$$

Поскольку идеал $\mathfrak{a}x_0/a_0$, очевидно, принадлежит классу $\{\mathfrak{a}\}$, это доказывает лемму 1.8 и завершает доказательство теоремы 1.6. ■

Следствие 1.11 Если Λ — дедекиндово кольцо, то $K_0\Lambda \cong \mathbb{Z} \oplus \tilde{K}_0\Lambda$. Аддитивная группа идеала $\tilde{K}_0\Lambda$ — канонически изоморфна группе классов идеалов $\mathcal{C}(\Lambda)$, а произведение любых двух элементов этого идеала равно нулю.

Действительно, соответствие

$$[\mathfrak{a}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{a}_r] \mapsto (r, \{\mathfrak{a}_1 \dots \mathfrak{a}_r\})$$

определяет изоморфизм $K_0\Lambda$ с $\mathbb{Z} \oplus \mathcal{C}(\Lambda)$. Напомним, что $\tilde{K}_0\Lambda$ можно отождествить с множеством разностей $[P] - [Q]$, для которых $(\text{ранг } P) = (\text{ранг } Q)$. Поэтому каждый элемент $\tilde{K}_0\Lambda$ можно записать в виде $[\mathfrak{a}] - [\Lambda^1]$. Остается доказать, что

$$([\mathfrak{a}] - [\Lambda^1])([\mathfrak{b}] - [\Lambda^1]) = 0.$$

Но произведение $[\mathfrak{a}][\mathfrak{b}] = [\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}]$ равно $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]$. Действительно, проективные модули $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}$ и $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ оба имеют ранг 1, так что естественное отображение тензорного произведения на произведение идеалов является изоморфизмом. Теперь требуемое следует из 1.7. ■

Замечания. Группа классов идеалов $\mathcal{C}(\Lambda)$ естественно отождествляется с мультипликативной группой $1 + \tilde{K}_0\Lambda$ единиц кольца $K_0\Lambda$. Нечто подобное верно и для лю-

бого коммутативного кольца. Назовем модуль M над коммутативным кольцом Λ *обратимым*, если существует такой модуль N , что $M \otimes N$ — свободный модуль с одной образующей. Множество классов с точностью до изоморфизма обратимых модулей, очевидно, образует группу относительно тензорного произведения. Это — группа *Пикара* $\text{Pic}(\Lambda)$.

Можно показать, что модуль обратим тогда и только тогда, когда он проективен, конечно порожден и имеет ранг 1 над каждым простым идеалом (ср. Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, «Мир», М., 1971, гл. 2, стр. 164). Далее, внешний квадрат $E_\Lambda^2 M$ обратимого модуля равен нулю, ибо это — проективный модуль нулевого ранга над каждым простым идеалом (там же, стр. 124). Поэтому $\text{Pic}(\Lambda)$ вкладывается в группу единиц $K_0\Lambda$. В самом деле, если два обратимых модуля M и M' стабильно изоморфны, $M \oplus \Lambda^r \cong M' \oplus \Lambda^r$, то, вычислив $(r+1)$ -ю внешнюю степень обеих частей, находим $M \cong M'$ (Басс доказывает более сильное утверждение: существует каноническая проекция аддитивной группы $K_0\Lambda$ на мультипликативную подгруппу $\text{Pic}(\Lambda) \subset K_0\Lambda$).

В случае дедекиндова кольца Λ ясно, что $\text{Pic}(\Lambda)$ канонически изоморфна группе классов идеалов $C(\Lambda)$.

В заключение § 1 докажем теорему 1.4. Пусть F — конечное расширение поля рациональных чисел. Мы хотим установить, что множество Λ всех целых алгебраических чисел в F является дедекиндовым кольцом.

Пусть n — степень F над Q . Удобно называть аддитивную подгруппу с конечным базисом в F *решеткой*. Любая решетка L является свободной аддитивной абелевой группой ранга $\leq n$. Произведение LL' двух решеток в F — это решетка, порожденная всеми произведениями ll' с $l \in L$ и $l' \in L'$.

Лемма 1.12. *Элемент $f \in F$ является целым алгебраическим числом в том и только том случае, когда существует ненулевая решетка $L \subset F$ с условием $fL \subset L$.*

Действительно, если f — корень многочлена $x^k + a_1x^{k-1} + \dots + a_k$ с коэффициентами в Z , то элементы

поля $1, f, f^2, \dots, f^{k-1}$ порождают решетку $L = \mathbb{Z}[f]$, для которой $fL \subset L$. Обратно, если $fL \subset L$, где L порождена элементами $b_1, \dots, b_k$, то

$$fb_i = \sum_j a_{ij} b_j,$$

где (a_{ij}) — некоторая целочисленная матрица. Записав эти уравнения в виде

$$\sum_j (f\delta_{ij} - a_{ij}) b_j = 0,$$

где (δ_{ij}) — единичная матрица k -го порядка, мы получаем, что столбцы матрицы $(f\delta_{ij} - a_{ij})$ линейно зависимы. Значит, f удовлетворяет уравнению над $\mathbb{Z}$ со старшим коэффициентом 1

$$\det(f\delta_{ij} - a_{ij}) = 0,$$

что доказывает 1.12. ■

Отсюда видно, что множество Λ целых алгебраических чисел в F замкнуто относительно сложения и умножения. Действительно, если $\lambda, \mu \in \Lambda$ и L и L' — такие решетки, что

$$\lambda L \subset L, \quad \mu L' \subset L',$$

то произведение $L'' = LL'$ удовлетворяет условиям $(\lambda + \mu)L'' \subset L''$ и $\lambda\mu L'' \subset L''$. Тем самым Λ является кольцом.

Лемма 1.13. *Кольцо Λ является решеткой ранга n в F .*

Для доказательства используем свойства следа F над Q . Напомним, что если $F' \supset F$ — расширение Галуа поля Q , то аддитивный гомоморфизм

$$\text{trace}_{F/Q} : F \rightarrow Q$$

можно определить формулой

$$\text{trace}_{F/Q}(f) = \sigma_1(f) + \dots + \sigma_n(f),$$

где $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ — разные погружения F в F' (см., например, Ленг С., Алгебра).

Заметим, что множество целых алгебраических чисел в Q совпадает с $\mathbb{Z}$. Действительно, если дробь a/b

является корнем многочлена со старшим коэффициентом 1 над Z , то, освобождаясь от знаменателей, находим, что любой простой делитель b должен также делить a .

Стало быть, след из F в Q отображает Λ в Z . В самом деле, след целого алгебраического числа из F одновременно цел (в F') и принадлежит Q .

Теперь заметим, что у каждого элемента f поля F есть целое кратное $f + f + \dots + f = mf$, которое является целым алгебраическим числом. Действительно, представив f в виде корня многочлена с целыми коэффициентами, мы можем взять в качестве m модуль старшего коэффициента. По этой причине поле частных кольца Λ совпадает с F .

Рассмотрим теперь Q -билинейное спаривание

$$f, f' \mapsto \text{trace}_{F/Q}(ff')$$

из $F \times F$ в Q . Оно невырождено, ибо для каждого $f \neq 0$ можно взять $f' = 1/f$ и получить $\text{trace}(ff') \neq 0$. Выберем целые алгебраические числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, образующие базис F над Q . Тогда Q -линейная функция

$$f \mapsto (\text{trace}_{F/Q}(\lambda_1 f), \dots, \text{trace}_{F/Q}(\lambda_n f))$$

из F в $Q \oplus \dots \oplus Q$ биективна и погружает Λ в прямую сумму $Z \oplus \dots \oplus Z$. Значит, аддитивная группа Λ конечно порождена. Это доказывает лемму 1.13. ■

Отсюда вытекает, что любой ненулевой идеал $\mathfrak{a} \subset \Lambda$ также является решеткой ранга n в F . Вот еще три важных следствия леммы 1.13.

(1) Кольцо Λ нётерово.

В самом деле, если $\mathfrak{a}$ — ненулевой идеал, то кольцо $\Lambda/\mathfrak{a}$ конечно, так что $\mathfrak{a}$ содержится лишь в конечном числе идеалов.

(2) Любой ненулевой простой идеал в Λ максимален. Действительно, факторкольцо $\Lambda/\mathfrak{p}$ конечно, не имеет делителей нуля и, значит, является полем.

(3) Если элемент f в поле частных кольца Λ удовлетворяет условию $f\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}$, где $\mathfrak{a}$ — некоторый ненулевой идеал Λ , то $f \in \Lambda$.

Иными словами, Λ целозамкнуто в своем поле частных. Это следует из 1.12.

Теперь мы докажем, что любое кольцо без делителей нуля, удовлетворяющее условиям (1), (2) и (3), является дедекиндовым кольцом. Доказательство, принадлежащее Ван-дер-Вардену, исходит из следующего наблюдения:

любой ненулевой идеал $\mathfrak{a}$ в коммутативном нётеровом кольце содержит некоторое произведение ненулевых простых идеалов.

Действительно, если $\mathfrak{a}$ прост, доказывать нечего. В противном случае выберем два элемента в кольце, λ и μ , такие, что $\lambda, \mu \notin \mathfrak{a}$, но $\lambda\mu \in \mathfrak{a}$. Тогда идеалы $\mathfrak{a} + \lambda\Lambda$ и $\mathfrak{a} + \mu\Lambda$ строго больше $\mathfrak{a}$, но их произведение содержится в $\mathfrak{a}$. Теперь, предполагая по индукции, что наше наблюдение верно для этих двух больших идеалов, получаем, что оно верно и для $\mathfrak{a}$. (Имеется в виду «нётерова индукция»; учесть, что Λ — нётерово кольцо.)

Пусть теперь даны кольцо Λ , удовлетворяющее условиям (1), (2) и (3), и ненулевые идеалы $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$. Мы хотим показать, что $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{c}$ для некоторого идеала $\mathfrak{c}$. Примем индуктивное предположение, что этот факт верен для любого идеала $\mathfrak{b}'$, строго большего, чем $\mathfrak{b}$, и для любого идеала $\mathfrak{a}' \subset \mathfrak{b}'$. Индукция начинается с тривиального случая $\mathfrak{b} = \Lambda$.

Выберем в $\mathfrak{b}$ ненулевой элемент b и рассмотрим произведение максимальных идеалов $\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_r \subset \Lambda b$ с наименьшим возможным r . Выберем также максимальный идеал $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{b}$. Так как $\mathfrak{p}$ содержит $\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_r$, $\mathfrak{p}$ содержит один из $\mathfrak{p}_i$, так что $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_i$. Пусть для конкретности $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1$. Так как r минимально, произведение $\mathfrak{p}_2 \dots \mathfrak{p}_r$ не содержится в Λb . Значит, существует такой элемент $c \in \mathfrak{p}_2 \dots \mathfrak{p}_r$, что $c \notin \Lambda b$. Очевидно,

$$cb \subset c\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}_2 \dots \mathfrak{p}_r \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_r \subset \Lambda b.$$

Поэтому

$$(c/b) b \subset \Lambda,$$

хотя элемент $c/b \in F$ и не лежит в Λ . Рассмотрим идеал

$$\mathfrak{b}' = b^{-1}(\Lambda b + \Lambda c) b = b + (c/b) b$$

в Λ . Так как $c/b \notin \Lambda$, из (3) следует, что b' строго больше b . Согласно индуктивному предположению, для любого $a \subset b$ уравнение

$$a = b'c'$$

имеет решение c' . Полагая

$$c = b^{-1}(\Lambda b + \Lambda c)c' \subset F,$$

получим

$$bc = b^{-1}(\Lambda b + \Lambda c)bc' = b'c' = a,$$

что и требовалось. Это множество c содержится в Λ , потому что $bc \subset b$ [ср. (3)]. Это показывает, что Λ — дедекиндова область, и завершает доказательство теоремы 1.4. ■

§ 2. КОНСТРУКЦИЯ ПРОЕКТИВНЫХ МОДУЛЕЙ

Рассмотрим некоторый коммутативный квадрат гомоморфизмов колец

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{i_1} & \Lambda_1 \\ i_2 \downarrow & & \downarrow j_1 \\ \Lambda_2 & \xrightarrow{j_2} & \Lambda' \end{array}$$

удовлетворяющий следующим двум условиям.

Условие 1. Λ является произведением Λ_1 и Λ_2 над Λ' . Иными словами, для любых двух элементов $\lambda_1 \in \Lambda_1$ и $\lambda_2 \in \Lambda_2$ с общим образом $j_1(\lambda_1) = j_2(\lambda_2) \in \Lambda'$ существует единственный элемент $\lambda \in \Lambda$, для которого $i_1(\lambda) = \lambda_1$ и $i_2(\lambda) = \lambda_2$.

Условие 2. По крайней мере один из двух гомоморфизмов j_1, j_2 сюръективен.

В этой ситуации мы покажем, как строить проективные модули над Λ , пользуясь проективными модулями над Λ_1 и Λ_2 как строительными блоками.

Обозначения. Пусть $f: \Lambda \rightarrow \Lambda_1$ — гомоморфизм колец, а M — левый Λ -модуль. Напомним, что через $f_{\#}M$ обозначается индуцированный левый Λ_1 -модуль $\Lambda_1 \otimes_{\Lambda} M$.

Существует каноническое Λ -линейное отображение

$$f_*: M \rightarrow f_{\#}M.$$

Например, если M — свободный модуль над Λ с базисом $\{b_{\alpha}\}$, то $f_{\#}M$ — свободный модуль над Λ_1 с базисом $\{f_*b_{\alpha}\}$.

Вернемся теперь к коммутативному квадрату колец, подчиненному условиям 1 и 2.

Основная конструкция. Предположим, что заданы проективный Λ_1 -модуль P_1 , проективный Λ_2 -модуль P_2 и изоморфизм Λ' -модулей

$$h: j_{1\#}P_1 \rightarrow j_{2\#}P_2.$$

Обозначим через $M = M(P_1, P_2, h)$ подгруппу произведения $P_1 \times P_2$, состоящую из всех пар (p_1, p_2) с условием $hj_{1*}(p_1) = j_{2*}(p_2)$.

Таким образом, мы получаем коммутативный квадрат аддитивных групп

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & P_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ P_2 & \xrightarrow{i_{2*}} & j_{2\#}P_2 \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ h j_{1*} \end{array}$$

удовлетворяющий аналогам условий 1 и 2. Превратим M в левый Λ -модуль, положив

$$\lambda \cdot (p_1, p_2) = (i_1(\lambda) \cdot p_1, i_2(\lambda) \cdot p_2).$$

ТЕОРЕМА 2.1. *Модуль $M = M(P_1, P_2, h)$ проективен над Λ . Кроме того, он конечно порожден над Λ , если P_1 и P_2 конечно порождены над Λ_1 и Λ_2 соответственно.*

ТЕОРЕМА 2.2. *Любой проективный Λ -модуль изоморфен $M(P_1, P_2, h)$ для подходящих P_1, P_2 и h .*

ТЕОРЕМА 2.3. *Модули P_1 и P_2 естественно изоморфны модулям $i_{1\#}M$ и $i_{2\#}M$ соответственно.*

Остаток § 2 посвящен доказательствам.

Прежде чем доказывать теорему 2.1 в общем случае, мы рассмотрим ситуацию, в которой P_1 и P_2 свободны.

Выберем базис $\{x_\alpha\}$ для P_1 над Λ_1 и базис $\{y_\beta\}$ для P_2 над Λ_2 . Они определяют базисы $\{j_{1*}x_\alpha\}$ модуля $i_{1\#}P_1$ и $\{j_{2*}y_\beta\}$ модуля $j_{2\#}P_2$ над Λ' . Изоморфизм

$$h: j_{1\#}P_1 \rightarrow j_{2\#}P_2$$

полностью описывается матрицей¹⁾

$$A = (a_{\alpha\beta})$$

над Λ' , для которой

$$h(j_{1*}x_\alpha) = \sum a_{\alpha\beta} j_{2*}y_\beta.$$

¹⁾ Нас в основном будут интересовать случаи, когда множества индексов $\{\alpha\}$ и $\{\beta\}$ конечны. Однако рассуждения проходят и для бесконечных множеств, если условиться, что у бесконечных «матриц» в каждой строке число ненулевых элементов конечно.

Матрица $(a_{\alpha\beta})$ может возникнуть в этой конструкции тогда и только тогда, когда она обратима, то есть имеет левую и правую обратную $(b_{\beta\alpha})$.

ЛЕММА 2.4. *Предположим, что $A = (a_{\alpha\beta})$ является j_2 -образом некоторой обратимой матрицы над Λ_2 . Тогда модуль $M = M(P_1, P_2, h)$ свободен.*

Доказательство. Положим $a_{\alpha\beta} = j_2 c_{\alpha\beta}$, где $(c_{\alpha\beta})$ обратима. Пусть, далее,

$$y'_\alpha = \sum c_{\alpha\beta} y_\beta \in P_2.$$

Очевидно элементы $\{y'_\alpha\}$ образуют базис модуля P_2 . Тождество

$$h j_{1*} x_\alpha = j_{2*} y'_\alpha$$

показывает тогда, что пара

$$z_\alpha = (x_\alpha, y'_\alpha) \in P_1 \times P_2$$

принадлежит подмодулю $M(P_1, P_2, h) \subset P_1 \times P_2$. Теперь легко проверить, что $M(P_1, P_2, h)$ свободен над Λ с базисом $\{z_\alpha\}$. ■

ЛЕММА 2.5. *Если P_1 и P_2 свободны, а j_2 сюръективен, то $M(P_1, P_2, h)$ проективен.*

Доказательство. Пусть Q_1 — свободный Λ_1 -модуль с базисом $\{u_\beta\}$, находящимся во взаимно однозначном соответствии с базисом $\{y_\beta\}$ модуля P_2 . Аналогично пусть Q_2 — свободный Λ_2 -модуль с базисом $\{v_\alpha\}$, находящимся во взаимно однозначном соответствии с базисом $\{x_\alpha\}$ модуля P_1 . Рассмотрим изоморфизм

$$g: j_{1\#} Q_1 \rightarrow j_{2\#} Q_2$$

с матрицей A^{-1} , где $A = (a_{\alpha\beta})$ — матрица h . Тогда

$$\begin{aligned} M(P_1, P_2, h) \oplus M(Q_1, Q_2, g) &\cong \\ &\cong M(P_1 \oplus Q_1, P_2 \oplus Q_2, h \oplus g), \end{aligned}$$

где $h \oplus g$ имеет матрицу вида

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix}$$

над Λ' . Мы докажем, что эта составная матрица удовлетворяет условию леммы 2.4. Отсюда будет следовать, что модуль $M(P_1 \oplus Q_1, P_2 \oplus Q_2, h \oplus g)$ свободен и, значит, $M(P_1, P_2, h)$ проективен.

Начнем с тождества

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -A^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как j_2 сюръективен, первый множитель справа, очевидно, поднимается до матрицы вида $\begin{pmatrix} I & * \\ 0 & I \end{pmatrix}$ в Λ_2 . Но любая матрица такого вида обратима. Остальные множители поднимаются аналогично. Это доказывает 2.5. ■

Теперь рассмотрим общий случай теоремы 2.1, где модули P_1, P_2 предполагаются только проективными и задан изоморфизм

$$h: j_{1\#}P_1 \cong j_{2\#}P_2.$$

Лемма 2.6. *Существуют такие проективные модули Q_1 над Λ_1 и Q_2 над Λ_2 , что $P_1 \oplus Q_1$ и $P_2 \oplus Q_2$ свободны и $j_{1\#}Q_1 \cong j_{2\#}Q_2$.*

Доказательство. Поскольку P_1 проективен, во всяком случае можно подобрать такой Λ_1 -модуль N_1 , что $P_1 \oplus N_1$ свободен ранга r . Здесь r — любое кардинальное число; если P_1 конечно порожден, можно считать, что r конечно. Положим

$$P_1 \oplus N_1 \cong (\Lambda_1)^r.$$

Аналогично подберем N_2 так, чтобы

$$P_2 \oplus N_2 \cong (\Lambda_2)^s.$$

Применяя $j_{1\#}$ и $j_{2\#}$ соответственно и полагая

$$P' = j_{1\#}P_1 \cong j_{2\#}P_2,$$

получим

$$P' \oplus j_{1\#}N_1 \cong (\Lambda')^r, \quad P' \oplus j_{2\#}N_2 \cong (\Lambda')^s,$$

откуда

$$j_{1\#}N_1 \oplus (\Lambda')^s \cong j_{1\#}N_1 \oplus P' \oplus j_{2\#}N_2 \cong j_{2\#}N_2 \oplus (\Lambda')^r.$$

Положив теперь

$$Q_1 = N_1 \oplus (\Lambda_1)^s, \quad Q_2 = N_2 \oplus (\Lambda_2)^r,$$

найдем, что $j_1 \# Q_1 \cong j_2 \# Q_2$, а это и требовалось. ■

Доказательство теоремы 2.1. Выберем Q_1 и Q_2 , как выше, и фиксируем некоторый изоморфизм

$$k: j_1 \# Q_1 \rightarrow j_2 \# Q_2.$$

Из сюръективности j_2 следует, что модуль

$$\begin{aligned} M(P_1, P_2, h) \oplus M(Q_1, Q_2, k) &\cong \\ &\cong M(P_1 \oplus Q_1, P_2 \oplus Q_2, h \oplus k) \end{aligned}$$

проективен в силу леммы 2.5. Значит, модуль $M(P_1, P_2, h)$ проективен.

В случае когда P_1, P_2 конечно порождены, мы должны доказать то же для $M(P_1, P_2, h)$. Модули Q_1, Q_2 можно тогда считать конечно порожденными. Просматривая доказательства лемм 2.4 и 2.5, мы убеждаемся, что все конструкции в них сохраняют конечную порожденность. Значит, $M(P_1, P_2, h)$ является прямым слагаемым конечно порожденного модуля и потому конечно порожден. Это завершает доказательство теоремы 2.1. ■

Доказательство теоремы 2.2. Если P проективен над Λ , положим

$$P_1 = i_1 \# P, \quad P_2 = i_2 \# P.$$

Так как $j_1 i_1 = j_2 i_2$, существует канонический изоморфизм

$$h: j_1 \# P_1 \rightarrow j_2 \# P_2.$$

Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{i_1*} & P_1 \\ i_2* \downarrow & & \downarrow h j_1* \\ P_2 & \xrightarrow{j_2*} & j_2 \# P_2 \end{array}$$

очевидно, удовлетворяет аналогам условий 1 и 2. В частности, P является произведением P_1 и P_2 над $j_2 \# P_2$. Поэтому

$$P \cong M(P_1, P_2, h). \quad \blacksquare$$

Доказательство теоремы 2.3. Для любого модуля $M = M(P_1, P_2, h)$ естественное Λ -линейное отображение $M \rightarrow P_1$ порождает Λ -линейное отображение

$$f: i_{1\#}M \rightarrow P_1.$$

Мы должны показать, что это изоморфизм.

Частный случай. В условиях леммы 2.4 модули $i_{1\#}M$ и P_1 свободны над Λ_1 и их базисы отображаются взаимно однозначно посредством f . Значит, f — изоморфизм.

Общий случай. Доказательство теоремы 2.1 состояло в проверке того, что каждый из модулей $M(P_1, P_2, h)$ является прямым слагаемым модуля $M(P_1 \oplus \bar{P}_1, P_2 \oplus \bar{P}_2, h \oplus \bar{h})$, удовлетворяющего условиям леммы 2.4. Значит, связанное с ним отображение $f \oplus \bar{f}$ является изоморфизмом. Потому и f — изоморфизм, что завершает доказательство. ■

§ 3. ГРУППА УАЙТХЕДА $K_1\Lambda$

Пусть $GL(n, \Lambda)$ — полная линейная группа, состоящая из обратимых $(n \times n)$ -матриц над кольцом Λ , и пусть $GL(\Lambda)$ — прямой предел (т. е. объединение) последовательности

$$GL(1, \Lambda) \subset GL(2, \Lambda) \subset GL(3, \Lambda) \subset \dots,$$

где погружение $GL(n, \Lambda)$ в $GL(n+1, \Lambda)$ определяется так:

$$A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица из $GL(\Lambda)$ называется *элементарной*, если она отличается от единичной матрицы в одном-единственном не диагональном члене.

ЛЕММА УАЙТХЕДА 3.1. *Подгруппа $E(\Lambda) \subset GL(\Lambda)$, порожденная всеми элементарными матрицами, совпадает с коммутантом группы $GL(\Lambda)$.*

Доказательство. Легко проверить, что каждая элементарная матрица является коммутатором двух других элементарных матриц (ср. § 5). Наоборот, любой коммутатор $ABA^{-1}B^{-1}$ в $GL(n, \Lambda)$ представляется в виде

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (BA)^{-1} & 0 \\ 0 & BA \end{pmatrix}$$

в $GL(2n, \Lambda)$. В доказательстве леммы 2.5 показано, как каждый из этих множителей можно разложить в произведение элементарных (ср. лемму 4.3). ■

Таким образом, $E(\Lambda)$ — нормальная подгруппа в $GL(\Lambda)$, а фактор $GL(\Lambda)/E(\Lambda)$ является корректно определенной абелевой группой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Факторгруппа $GL(\Lambda)/E(\Lambda)$ называется *группой Уайтхеда $K_1\Lambda$* .

Мы будем записывать $K_1\Lambda$ иногда аддитивно, а иногда мультипликативно.

Ясно, что любой гомоморфизм колец $f: \Lambda \rightarrow \Lambda'$ индуцирует гомоморфизм групп $f_*: K_1\Lambda \rightarrow K_1\Lambda'$. Таким образом, K_1 — ковариантный функтор.

Замечание. Пусть P — любой конечно порожденный проективный модуль над Λ , а $\text{Aut}(P)$ — группа его Λ -автоморфизмов. Интересно заметить, что существует канонический гомоморфизм

$$\text{Aut}(P) \rightarrow K_1\Lambda.$$

В классическом случае линейных преобразований векторного пространства это просто определитель.

Он строится так. Выберем такой конечно порожденный проективный модуль Q , что $P \oplus Q$ свободен. Пусть $b_1, \dots, b_r$ — его базис над Λ . Каждый автоморфизм α модуля P определяет автоморфизм $\alpha \oplus 1_Q$ модуля $P \oplus Q$. В выбранном базисе последний представлен некоторой матрицей из $GL(r, \Lambda)$.

Лемма 3.2. *Описанное вложение*

$$\text{Aut}(P) \subset \text{Aut}(P \oplus Q) \cong GL(r, \Lambda) \subset GL(\Lambda)$$

определено с точностью до внутреннего автоморфизма группы $GL(\Lambda)$ и, значит, определяет канонический гомоморфизм $\text{Aut}(P) \rightarrow K_1\Lambda$.

Доказательство. Пусть $b'_1, \dots, b'_s$ — другой базис $P \oplus Q$. (Мы должны учесть возможность того, что $s \neq r$.) Тогда $b'_i = \sum c_{ij} b_j$, где $(s \times r)$ -матрица $C = (c_{ij})$ обратима. Пусть A — матрица автоморфизма $\alpha \oplus 1_Q$ в первоначальном базисе $\{b_j\}$. Матрица, сопряженная с A в $GL(r+s, \Lambda)$ посредством квадратной матрицы

$$\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix},$$

имеет вид $CAC^{-1} \in GL(s, \Lambda)$ и, значит, описывает автоморфизм $\alpha \oplus 1_Q$ в новом базисе. Таким образом, замена базиса меняет наше вложение только на внутренний автоморфизм $GL(\Lambda)$.

Кроме того, если заменить Q другим модулем Q' , так что, скажем, $P \oplus Q' \cong \Lambda^t$, то $Q \oplus \Lambda^t \cong Q' \oplus \Lambda^r$. Значит, и другой выбор Q действует на вложение как внутренний автоморфизм. Это завершает доказательство. ■

Предположим теперь, что кольцо Λ коммутативно. Тогда можно дать следующее определение умножения

$$K_0\Lambda \otimes K_1\Lambda \rightarrow K_1\Lambda.$$

Пусть $[P]$ — любая образующая группы $K_0\Lambda$. Соответствие

$$\alpha \mapsto 1_P \otimes \alpha$$

определяет некоторый гомоморфизм группы автоморфизмов $\text{Aut}(\Lambda^n) \cong GL(n, \Lambda)$ в $\text{Aut}(P \otimes \Lambda^n)$. (Здесь символ $\otimes$ означает тензорное произведение над Λ .) Комбинируя эту конструкцию с гомоморфизмом из леммы 3.2, мы получаем сквозное отображение

$$GL(n, \Lambda) \rightarrow \text{Aut}(P \otimes \Lambda^n) \rightarrow K_1\Lambda,$$

которое будет обозначаться через $h(P)$. Тождество

$$h(P \oplus P') = h(P) + h(P')$$

показывает, что гомоморфизм $h(P)$ зависит только от класса P с точностью до стабильного изоморфизма и, значит, только от элемента $[P] \in K_0\Lambda$. Перейдем теперь к прямому пределу при $n \rightarrow \infty$ и затем к фактору по коммутанту. По определению получившийся гомоморфизм из $K_1\Lambda$ в $K_1\Lambda$ переводит каждый элемент k в произведение $[P] \cdot k$. Это и дает умножение $K_0\Lambda \otimes K_1\Lambda \rightarrow K_1\Lambda$, превращающее $K_1\Lambda$ в модуль над кольцом $K_0\Lambda$.

Другая характерная черта коммутативного случая состоит в том, что существует обычный определитель, который позволяет расщепить $K_1\Lambda$ в прямую сумму. Пусть $\Lambda^\bullet$ — мультипликативная группа всех единиц Λ . Тогда сквозное отображение

$$\Lambda^\bullet = GL(1, \Lambda) \subset GL(\Lambda) \xrightarrow{\det} \Lambda^\bullet,$$

очевидно, является тождественным. Поэтому, обозначая через $SL(\Lambda) \subset GL(\Lambda)$ ядро определителя, мы получаем разложение в прямую сумму:

$$K_1\Lambda \cong \Lambda^\bullet \oplus (SL(\Lambda)/E(\Lambda)).$$

Второе слагаемое иногда обозначается через $SK_1\Lambda$.

Во многих интересных случаях специальная линейная группа $SL(\Lambda)$ порождена элементарными матрицами, так

что $K_1\Lambda \cong \Lambda^*$. Так, например, обстоит дела для полей, локальных колец, колец с алгоритмом Евклида и колец целых чисел в конечных расширениях поля рациональных чисел (ср. п. 16.3).

Дальнейшую информацию и ссылки можно найти в работах Milnor J., Whitehead torsion, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 72 (1966), 358—426; Kervaire M., Le groupe de Whitehead (notes by J. M. Arnaudies, mimeographed), Ecole Norm. Sup. Paris, 1966; de Rham G., Maumary S., Kervaire M., Torsion et type simple d'homotopie, Lecture Notes in Math., 48, Springer, 1967.

Точная последовательность „Майера — Виеториса“

Рассмотрим теперь квадрат гомоморфизмов колец, удовлетворяющий условиям 1 и 2 из § 2. Мы построим шестичленную точную последовательность:

$$\begin{aligned} K_1\Lambda &\rightarrow K_1\Lambda_1 \oplus K_1\Lambda_2 \rightarrow K_1\Lambda' \rightarrow \\ &\rightarrow K_0\Lambda \rightarrow K_0\Lambda_1 \oplus K_0\Lambda_2 \rightarrow K_0\Lambda'. \end{aligned}$$

Определим гомоморфизмы

$$K_\alpha\Lambda \rightarrow K_\alpha\Lambda_1 \oplus K_\alpha\Lambda_2 \rightarrow K_\alpha\Lambda',$$

полагая

$$x \mapsto (i_{1*}x, i_{2*}x)$$

и

$$(y, z) \mapsto j_{1*}y - j_{2*}z$$

соответственно. Гомоморфизм $\partial: K_1\Lambda' \rightarrow K_0\Lambda$ определим следующим образом. Представим элемент $x \in K_1\Lambda'$ некоторой матрицей в $GL(n, \Lambda')$. Эта матрица определяет некоторый изоморфизм h между свободным Λ' -модулем $j_{1\#}\Lambda_1^n$ и свободным Λ' -модулем $j_{2\#}\Lambda_2^n$. Пользуясь обозначениями § 2, мы можем построить проективный модуль $M = M(\Lambda_1^n, \Lambda_2^n, h)$ над кольцом Λ . Положим

$$\partial(x) = [M] - [\Lambda^n] \in K_0\Lambda.$$

Нетрудно проверить, что ∂ — корректно определенный гомоморфизм.

ТЕОРЕМА 3.3. Построенная шестичленная последовательность точна.

Доказательство нетрудно, и мы опускаем подробности.

Существует очевидная аналогия между этой последовательностью и последовательностью Майера — Виеториса в алгебраической топологии. По этой причине мы назовем и нашу последовательность так же.

Пример. Пусть Π — циклическая группа простого порядка p с образующей t , и пусть

$$\xi = e^{2\pi i/p}.$$

Известно, что $Z[\xi]$ совпадает с целым замыканием Z в круговом поле $Q[\xi]$ и потому является дедекиндовым кольцом. (См. п. 1.4, ср. Lang S., Algebraic Number Theory, Addison-Wesley, 1970, стр. 75.)

Определим квадрат гомоморфизмов

$$\begin{array}{ccc} Z\Pi & \xrightarrow{i_1} & Z[\xi] \\ \downarrow i_2 & & \downarrow j_1 \\ Z & \xrightarrow{j_2} & F_p \end{array}$$

в котором

$$i_1(t) = \xi, \quad j_1(\xi) = 1, \quad i_2(t) = 1.$$

Здесь $Z\Pi$ означает целочисленное групповое кольцо циклической группы Π , а F_p — поле Z/pZ классов вычетов $\bmod p$. Нетрудно проверить, что условия 1 и 2 выполнены. Поэтому существует точная последовательность

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow K_1 Z(\xi) \oplus K_1 Z &\rightarrow K_1 F_p \rightarrow K_0 Z\Pi \rightarrow \\ &\rightarrow K_0 Z[\xi] \oplus K_0 Z \rightarrow K_0 F_p. \end{aligned}$$

Мы докажем следующий факт.

ТЕОРЕМА РИМА. Гомоморфизм $i_{1*} : K_0 Z\Pi \rightarrow K_0 Z[\xi]$ является изоморфизмом.

Поэтому вычисление группы $K_0 Z\Pi$ сведется к изучению группы классов идеалов дедекиндова кольца $Z[\xi]$, где $\xi = e^{2\pi i/p}$ (см. п. 1.11).

Замечание 3.4. Точная структура этой группы классов идеалов известна лишь для простых $p < 50$. Теория

полей классов показывает, что норменный гомоморфизм

$$\begin{aligned} \text{группа классов идеалов } (Z[\xi]) &\rightarrow \\ &\rightarrow \text{группа классов идеалов } (Z[\xi + \xi^{-1}]) \end{aligned}$$

всегда сюръективен. (Ср. Chevalley C., *C. R. Acad. Sci. Paris*, **192** (1931), 257—258, или Iwasawa K., *Abh. Math., Sem. Hamburg*, **20** (1956), 257—258.) Кольцо $Z[\xi + \xi^{-1}]$ совпадает с кольцом целых чисел в максимальном вещественном подполе поля $Q(\xi)$. Порядок ядра этого норменного гомоморфизма называется *относительным числом классов* $h_1(p)$, а порядок образа принято обозначать через $h_2(p)$.

Куммер около 120 лет назад указал явную формулу для относительного числа классов, провел явные вычисления для $p < 100$ и привел некоторые подробности о структуре ядра в нескольких частных случаях. (Прекрасное изложение классической теории можно найти в книге: Борович З. И. и Шафаревич И. Р., *Теория чисел*, «Наука», 1972; дальнейшие ссылки см. Whitehead J., *Torsion*, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **72**, 413, 419.) Второй множитель числа классов $h_2(p)$ гораздо труднее вычислить. Однако Бауэр показал недавно, что $h_2(p) = 1$ при $p < 50$ (Bauer H., *Numerische Bestimmung von Klassenzahlen zeeller, zyklischer Zahlkörpern*, *Journ. of Number theory*, **1** (1969), № 2, 161—162). Объединяя результат Бауэра с явными вычислениями Куммера, мы получаем следующую таблицу, в которой (m) обозначает циклическую группу Z/mZ .

p	Группа классов идеалов ($Z[\xi]$)
≤ 19	(1)
23	(3)
29	$(2) \oplus (2) \oplus (2)$
31	(9)
37	(37)
41	$(11) \oplus (11)$
43	(211)
47	$(5) \oplus (139)$

Относительное число классов $h_1(p)$ растет очень быстро с ростом p . Например,

$$h_1(97) = 411\,322\,824\,001.$$

Куммер в 1851 г. высказал утверждение, что $h_1(p)$ асимптотически ведет себя как функция

$$G(p) = 2p(p/4\pi^2)^{(p-1)/4}$$

при $p \rightarrow \infty$. Энкени и Чоула (Ankeny N. C., Chowla S., The class number of the cyclotomic fields, *Canad. J. Math.*, 3 (1951), № 4, 486 — 494) доказали более слабое утверждение

$$\log(h_1(p)/G(p)) = o(\log p)$$

при $p \rightarrow \infty$. (См. также Siegel C., Zu zwei Bemerkungen Kummers, *Gesam. Abh.*, III, 440.) Отсюда следует, что для больших значений p функция $h_1(p)$ становится строго возрастающей. Доказательство основано на тождестве

$$\log(h_1(p)/G(p)) = \frac{p-1}{2} \sum \pm 1/nq^n,$$

где суммирование производится по всем степеням простых чисел q^n , сравнимым с ± 1 по модулю p , а знак слагаемого совпадает со знаком в сравнении.

Гораздо меньше известно о втором множителе $h_2(p)$. Среди простых чисел < 197 есть ровно одно, 163, для которого $h_2(p)$ четно. (См. Kummer E., *Monatsber. K. Akad. Wiss. Berlin*, 1870, 855 — 880.) Было высказано предположение о том, что $h_2(p) = 1$ при $p < 97$, но что $h_2(97) \neq 1$ (Schrutka v. Rechtenstamm G., *Abh. D. Akad. Wiss. Berlin*, 2 (1964), 4). Дальнейшие сведения можно найти в статьях: Ankeny N. C., Chowla S., Hasse H., On the class number of the maximal real subfield of a cyclotomic field, *Journ. reine angew. Math.*, 217 (1965), 217 — 220, а также Giffen C., Diffeotopically trivial periodic diffeomorphisms, *Invent. math.*, 11 (1970), 340 — 348.

Доказательство теоремы Рима. Так как $j_{2*} : K_0Z \rightarrow K_0F_p$, очевидно, является изоморфизмом, достаточно проверить, что гомоморфизм $j_{1*} : K_1Z[\xi] \rightarrow K_1F_p$ сюръективен. Но K_1F_p совпадает с группой ненулевых элементов поля F_p , т. е. с группой классов вычетов mod p , взаимно простых с p .

Для каждого простого числа k с $1 \leq k \leq p-1$ рассмотрим элемент

$u = (\xi^k - 1)/(\xi - 1) = 1 + \xi + \dots + \xi^{k-1}$
из кольца $Z[\xi]$. Положив $\xi^k = \eta$ и $\eta^l = \xi$, мы можем рассмотреть также элемент

$$v = (\eta^l - 1)/(\eta - 1)$$

этого кольца. Очевидно, $uv = 1$, так что u — единица в $Z[\xi]$. Так как $j_1(u)$ совпадает с классом вычетов $k \bmod p$, это показывает, что гомоморфизм j_{1*} сюръективен, что завершает доказательство теоремы Рима (ср. Басс Х., Алгебраическая K -теория, «Мир», М., стр. 461). ■

Замечание. Аналогичную технику можно применить для вычисления группы $K_1Z\Pi$, если воспользоваться результатами, которые будут доказаны позже, в пп. 6.4, 9.13 и 16.3. Действительно, нашу последовательность Майера — Виеториса можно продолжить влево следующим образом:

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow K_1Z\Pi \rightarrow K_1Z[\xi] \oplus K_1Z \rightarrow K_1F_p \xrightarrow{0} K_0Z\Pi \rightarrow \dots$$

Далее группу $K_1Z[\xi]$ можно отождествить с группой единиц кольца $Z[\xi]$. Отсюда легко следует, что $K_1Z\Pi$ отождествляется с группой единиц кольца $Z\Pi$, которая является прямой суммой конечной группы $\pm \Pi$ порядка $2p$ и свободной абелевой группы. Согласно теореме Дирихле об единицах, ранг этой свободной абелевой группы равен нулю для $p=2, 3$ и $(p-3)/2 > 0$ при $p > 3$. (Дальнейшие сведения и ссылки можно найти в книге: Басс Х., Алгебраическая K -теория, стр. 472 — 477.)

§ 4. ТОЧНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ, СВЯЗАННАЯ С ИДЕАЛОМ

Пусть $\mathfrak{a}$ — двусторонний идеал в кольце Λ . Мы определим группы $K_0\mathfrak{a}$ и $K_1\mathfrak{a}$ и докажем следующий факт.

Лемма 4.1. *Каждый двусторонний идеал $\mathfrak{a} \subset \Lambda$ доставляет точную последовательность из шести членов*

$$K_1\mathfrak{a} \rightarrow K_1\Lambda \rightarrow K_1\Lambda/\mathfrak{a} \rightarrow K_0\mathfrak{a} \rightarrow K_0\Lambda \rightarrow K_0\Lambda/\mathfrak{a}.$$

Группы $K_i\mathfrak{a}$ определяются так.

Назовем *дублем* $D = D(\Lambda, \mathfrak{a})$ кольца Λ вдоль идеала $\mathfrak{a}$ подкольцо $\Lambda \times \Lambda$, состоящее из всех пар (λ, λ') с $\lambda \equiv \lambda' \pmod{\mathfrak{a}}$. Обозначим через $p_1: D \rightarrow \Lambda$ и $p_2: D \rightarrow \Lambda$ два гомоморфизма проекции

$$p_1(\lambda, \lambda') = \lambda, \quad p_2(\lambda, \lambda') = \lambda'.$$

Определение (Басс, Штейн). Группа $K_i\mathfrak{a}$ определяется как ядро гомоморфизма $p_{1*}: K_i D \rightarrow K_i\Lambda$, индуцированного проекцией p_1 . Здесь $i = 0$ или 1 .

Теперь рассмотрим коммутативный квадрат гомоморфизмов колец

$$\begin{array}{ccc} & D & \\ p_1 \swarrow & & \searrow p_2 \\ \Lambda & & \Lambda \\ & \searrow & \swarrow \\ & \Lambda/\mathfrak{a} & \end{array}$$

Очевидно, он удовлетворяет условиям § 2 и потому доставляет точную последовательность Майера — Виеториса (п. 3.3). Нужную нам точную последовательность можно теперь извлечь из последовательности Майера — Виеториса. (Например, в качестве гомоморфизма $K_i\mathfrak{a} \rightarrow K_i\Lambda$ берется ограничение гомоморфизма $p_{2*}: K_i D \rightarrow K_i\Lambda$ на подгруппу $\text{Ker } p_{1*}$.) Это завершает доказательство леммы 4.1. ■

Замечание 1. Если кольцо Λ коммутативно, то существует операция умножения

$$K_0\Lambda \otimes K_i\mathfrak{a} \rightarrow K_i\mathfrak{a},$$

превращающая $K_i\mathfrak{a}$ в модуль над кольцом $K_0\Lambda$. Аналогично можно определить умножение

$$K_1\Lambda \otimes K_0\mathfrak{a} \rightarrow K_1\mathfrak{a}.$$

В самом деле, если даны элементы

$$x \in K_i \Lambda, \quad y \in K_j \mathfrak{a} \subset K_j D$$

с $i + j \leq 1$, то можно использовать диагональное вложение $\Delta: \Lambda \rightarrow D$, чтобы определить произведение

$$(\Delta_* x) \cdot y \in K_{i+j} D,$$

и нетрудно убедиться, что это произведение лежит в подгруппе $K_{i+j} \mathfrak{a}$.

Замечание 2. Группа $K_i D$ изоморфна прямой сумме $K_i \Lambda \oplus K_i \mathfrak{a}$. Для доказательства рассмотрим коммутативный треугольник

$$\begin{array}{ccc} & D & \\ \Delta \nearrow & \text{id} & \searrow p_1 \\ \Lambda & \longrightarrow & \Lambda \end{array}$$

Замечание 3. В случае когда идеал $\mathfrak{a}$ совпадает со всем кольцом Λ , наше обозначение может показаться на первый взгляд двусмысленным, но тогда $K_i \mathfrak{a} \rightarrow K_i \Lambda$ — изоморфизм, так что никаких проблем не возникает. В другом крайнем случае, когда $\mathfrak{a} = 0$, имеем $K_i \mathfrak{a} = 0$.

Замечание 4. Более серьезная двусмысленность возникает в случае, когда $\mathfrak{a}$ естественно рассматривать как идеал более чем в одном кольце. На самом деле можно показать, что группа $K_0 \mathfrak{a}$ зависит только от структуры $\mathfrak{a}$ как кольца (без единицы), так что она не зависит от объемлющего кольца Λ . Однако для $K_1 \mathfrak{a}$ это уже неверно. (См. Swan R., Excision in algebraic K-theory, *J. Pure Appl. Algebra*, 1 (1971), а также п. 6.3.) Здесь следует соблюдать должную осторожность. Басс пользуется обозначением $K_1(\Lambda, \mathfrak{a})$ вместо нашего $K_1 \mathfrak{a}$, чтобы подчеркнуть зависимость от Λ . (Ср. Басс Х., Алгебраическая K-теория, стр. 349, а также гл. VII, § 5.)

Конгруэнц-подгруппы

Посмотрим теперь на группу $K_1 \mathfrak{a}$ с совершенно другой точки зрения. Обозначим через $GL(n, \mathfrak{a})$ и назовем конгруэнц-подгруппой, определенной идеалом $\mathfrak{a}$, ядро естественного гомоморфизма

$$GL(n, \Lambda) \rightarrow GL(n, \Lambda/\mathfrak{a}).$$

Оно состоит из всех обратимых $(n \times n)$ -матриц вида $I \times A$, где A — матрица с элементами из $\mathfrak{a}$.

Следуя Бассу, рассмотрим подгруппу в $GL(n, \mathfrak{a})$, порожденную элементами вида STS^{-1} , где T — элементарная матрица из $GL(n, \mathfrak{a})$, а S — любой элемент группы $E(n, \Lambda)$, порожденный элементарными матрицами порядка n . Эту подгруппу мы будем обозначать символом $E(n, \mathfrak{a})$. По определению это наименьшая нормальная подгруппа в $E(n, \Lambda)$, содержащая все элементарные матрицы, недиагональные элементы которых принадлежат идеалу $\mathfrak{a}$. Переходя к прямому пределу при $n \rightarrow \infty$, мы получаем соответствующие группы $E(\mathfrak{a}) \subset \subset GL(\mathfrak{a})$.

Лемма 4.2. *Подгруппа $E(\mathfrak{a}) \subset GL(\mathfrak{a})$ является нормальной подгруппой, фактор по которой канонически изоморфен $K_1\mathfrak{a}$.*

Доказательство. Пусть по-прежнему D — дубль кольца Λ вдоль $\mathfrak{a}$. Очевидно, группу $GL(D)$ можно отождествить с подгруппой в $GL(\Lambda) \times GL(\Lambda)$, состоящей из всех пар обратимых матриц, сравнимых по модулю $GL(\mathfrak{a})$. Заметим, что подгруппа

$$I \times GL(\mathfrak{a}) \supset GL(D),$$

где I — единичная матрица, является ядром гомоморфизма

$$p_{1*}: GL(D) \rightarrow GL(\Lambda).$$

Аналогично подгруппа $I \times E(\mathfrak{a})$ является ядром гомоморфизма

$$p_{1*}: E(D) \rightarrow E(\Lambda).$$

В самом деле, для любой образующей STS^{-1} группы $E(\mathfrak{a})$ пару (I, STS^{-1}) можно записать в виде $(S, S)(I, T)(S, S)^{-1}$, так что она принадлежит $E(D)$. Наоборот, если (I, X) является произведением элементарных матриц из $GL(D)$, скажем,

$$(I, X) = (S_1, S_1 T_1) \dots (S_k, S_k T_k),$$

то X равна произведению

$$(S_1 T_1 S_1^{-1}) (S_1 S_2 T_2 S_2^{-1} S_1^{-1}) \dots (S_1 \dots S_k T_k S_k^{-1} \dots S_1^{-1})$$

и, значит, лежит в $E(\mathfrak{a})$.

Рассматривая теперь коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \rightarrow & E(\mathfrak{a}) & \rightarrow & GL(\mathfrak{a}) & \rightarrow \dots \rightarrow & K_1 \mathfrak{a} \rightarrow \dots \rightarrow 1 \\
 & & \downarrow I \times & & \downarrow I \times & & \downarrow \\
 1 & \rightarrow & E(D) & \rightarrow & GL(D) & \longrightarrow & K_1 D \rightarrow 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 1 & \rightarrow & E(\Lambda) & \rightarrow & GL(\Lambda) & \longrightarrow & K_1 \Lambda \rightarrow 1
 \end{array}$$

мы без труда убеждаемся, что факторгруппа $GL(\mathfrak{a})/E(\mathfrak{a})$ определена и изоморфна $K_1 \mathfrak{a}$. (Заметим, что $E(D)$ отображается на $E(\Lambda)$.) Это доказывает лемму 4.2. ■

Оставшаяся часть § 4 посвящена различным замечаниям, которые не будут использоваться впоследствии.

Вот другое описание группы $E(\mathfrak{a})$.

ЛЕММА 4.3 (Басс). *Группа $E(\mathfrak{a})$ совпадает с $[E(\Lambda), E(\mathfrak{a})] = [GL(\Lambda), GL(\mathfrak{a})]$ и, следовательно, является нормальной подгруппой в $GL(\Lambda)$. Центр факторгруппы $GL(\Lambda)/E(\mathfrak{a})$ совпадает с $GL(\mathfrak{a})/E(\mathfrak{a}) \cong K_1 \mathfrak{a}$.*

Здесь $[G_1, G_2]$ — группа, порожденная всевозможными коммутаторами $g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$, где $g_1 \in G_1$, $g_2 \in G_2$.

Доказательство. Включение $[E(\Lambda), E(\mathfrak{a})] \subset E(\mathfrak{a})$ следует из того, что $E(\mathfrak{a})$ является нормальной подгруппой в $E(\Lambda)$. Равенство можно установить, если учесть, что $E(\mathfrak{a})$ порождена выражениями вида

$$STS^{-1} = [S, T]T,$$

где T — элементарная матрица, которая в свою очередь представляется в виде коммутатора $[S', T']$ элементарной матрицы и элементарной матрицы из $GL(\mathfrak{a})$ (ср. § 5).

Любая матрица $X = I + A$ из $GL(n, \mathfrak{a})$ удовлетворяет тождеству

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & I \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ A & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & I \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I & X^{-1}A \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -XA & I \end{pmatrix},$$

которое показывает, что

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X^{-1} \end{pmatrix} \in E(2n, \mathfrak{a}).$$

Так как любая образующая $[Y, X]$ группы $[GL(n, \Lambda), GL(n, \mathfrak{a})]$ представляется в виде коммутатора матриц

$$\begin{pmatrix} Y & \\ & I \\ & & Y^{-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} X & \\ & X^{-1} \\ & & I \end{pmatrix}$$

и, значит, лежит в $[E(3n, \Lambda), E(3n, \mathfrak{a})]$, мы получаем

$$[GL(n, \Lambda), GL(n, \mathfrak{a})] \subset [E(3n, \Lambda), E(3n, \mathfrak{a})].$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, находим

$$[GL(\Lambda), GL(\mathfrak{a})] = [E(\Lambda), E(\mathfrak{a})].$$

Следовательно, $E(\mathfrak{a}) = [GL(\Lambda), GL(\mathfrak{a})]$, что показывает нормальность $E(\mathfrak{a})$ в $GL(\Lambda)$ и принадлежность фактора $GL(\mathfrak{a})/E(\mathfrak{a})$ центру $GL(\Lambda)/E(\mathfrak{a})$. Но любой элемент s центра $GL(\Lambda)/E(\mathfrak{a})$ отображается в элемент s' центра группы

$$GL(\Lambda)/GL(\mathfrak{a}) \subset GL(\Lambda/\mathfrak{a}).$$

Образ s' коммутирует со всеми элементарными матрицами в $GL(\Lambda/\mathfrak{a})$ и потому должен быть равен 1. Следовательно, $s \in E(\mathfrak{a})$, что завершает доказательство леммы 4.3. ■

Заметим, что проблема вычисления групп $K_1\mathfrak{a}$ равносильна задаче определения всех нормальных подгрупп в $GL(\Lambda)$. В самом деле, как показал Басс, для любой нормальной подгруппы $N \subset GL(\Lambda)$ существует ровно один двусторонний идеал $\mathfrak{a}$, такой, что $E(\mathfrak{a}) \subset N \subset GL(\mathfrak{a})$ (См. Bass H., *K-theory and stable algebra*, *Publ. Math. IHES*, **22** (1964), § 3.1.) Следовательно, N определяет некоторую подгруппу $N/E(\mathfrak{a}) \subset K_1\mathfrak{a}$. Обратно, ясно, что для любого идеала $\mathfrak{a}$ всякая подгруппа в $K_1\mathfrak{a}$ определяет соответствующую подгруппу $N \subset GL(\mathfrak{a})$, нормальную в $GL(\Lambda)$.

Предположим теперь, что Λ — коммутативное кольцо. Тогда существует гомоморфизм «определитель» $GL(\Lambda) \rightarrow \Lambda^*$, который дает разложение в прямую сумму

$$K_1\mathfrak{a} = U(\mathfrak{a}) \oplus SK_1\mathfrak{a}.$$

Здесь $U(\mathfrak{a})$ означает группу единиц, сравнимых с 1 по модулю $\mathfrak{a}$, и

$$SK_1\mathfrak{a} = SL(\mathfrak{a})/E(\mathfrak{a}),$$

где $SL(a)$ — группа матриц с единичным определителем в конгруэнц-подгруппе $GL(a)$.

Если Λ — дедекиндово кольцо, можно показать, что группа $SK_1 a$ мало зависит от a в том смысле, что для любого меньшего ненулевого идеала $b \subset a$ естественный гомоморфизм

$$SK_1 b \rightarrow SK_1 a$$

всегда сюръективен (ср. п. 6.6).

Примеры. Если $\Lambda = \mathbb{Z}$, то $SK_1 a = 0$ для всех идеалов a . (См. Mennicke J., Finite factor groups of the unimodular group, *Ann. of Math.*, 81 (1965), 31 — 37, или Bass H., Lazard M., Serre J.-P., Sous-groupes d'indice fini dans $SL(n, \mathbb{Z})$, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 70 (1964), 385 — 392.) То же верно для кольца целых алгебраических чисел в любом конечном расширении поля рациональных чисел, которое можно погрузить в вещественное поле. С другой стороны, если Λ — кольцо целых чисел вполне мнимого числового поля, а идеал a достаточно мал, то $SK_1 a$ является нетривиальной конечной циклической группой, которая изоморфна группе всех корней из единицы в Λ . Дальнейшие сведения читатель может получить из литературы, список которой дан в конце введения.

§ 5. ГРУППЫ СТЕЙНБЕРГА И ФУНКТОР K_2

Этот параграф посвящен соотношениям между элементарными матрицами над кольцом Λ .

Обозначим через $e_{ij}^\lambda \in GL(n, \Lambda)$ элементарную матрицу с элементом λ на (i, j) -м месте. Здесь i, j — любые разные целые числа между 1 и n , а λ — любой элемент кольца. В этих обозначениях

$$e_{ij}^\lambda e_{ij}^\mu = e_{ij}^{\lambda + \mu}.$$

(Заметим, в частности, что $(e_{ij}^\lambda)^{-1} = e_{ij}^{-\lambda}$.)

Коммутатор $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ двух элементарных матриц вычисляется так:

$$[e_{ij}^\lambda, e_{kl}^\mu] = \begin{cases} 1 & \text{при } j \neq k, i \neq l, \\ e_{il}^{\lambda\mu} & \text{при } j = k, i \neq l, \\ e_{kj}^{-\mu\lambda} & \text{при } j \neq k, i = l. \end{cases}$$

(Обратите внимание, что случай $j = k, i = l$ отсутствует в этом списке. Дело в том, что простой формулы для $[e_{ij}^\lambda, e_{ji}^\mu]$ нет.)

Следуя работе Стейнберга (Steinberg R., *Générateurs, relations et revêtements de groupes algébriques*, Colloq. Théorie des groupes algébriques, Bruxelles, 1962, 113—127), мы введем абстрактную группу, определенную образующими и соотношениями, которые призваны имитировать поведение элементарных матриц. Пусть снова i, j пробегают все пары разных целых чисел между 1 и n , а λ, μ — элементы из Λ .

Определение. При $n \geq 3$ группа Стейнберга $S(n, \Lambda)$ порождена образующими x_{ij}^λ с соотношениями

- (1) $x_{ij}^\lambda x_{ij}^\mu = x_{ij}^{\lambda + \mu},$
- (2) $[x_{ij}^\lambda, x_{jl}^\mu] = x_{il}^{\lambda\mu} \quad \text{при } i \neq l,$
- (3) $[x_{ij}^\lambda, x_{kl}^\mu] = 1 \quad \text{при } j \neq k, i \neq l.$

(Иными словами, $St(n, \Lambda)$ — это факторгруппа $\mathcal{F}/\mathcal{R}$, где $\mathcal{F}$ — свободная группа, порожденная символами x_{ij}^λ ,

а $\mathcal{R}$ — наименьшая нормальная подгруппа, в факторе по которой выполнены приведенные выше соотношения.)

Ограничение $n \geq 3$ наложено потому, что при $n = 2$ соотношения становятся совершенно неадекватными.

Определим канонический гомоморфизм

$$\varphi: \text{St}(n, \Lambda) \rightarrow GL(n, \Lambda)$$

формулой $\varphi(x_{ij}^\lambda) = e_{ij}^\lambda$. Это отображение действительно определяет гомоморфизм, потому что каждое из определяющих соотношений между образующими группы $\text{St}(n, \Lambda)$ превращается в тождество между элементарными матрицами. Образ $\varphi(\text{St}(n, \Lambda)) \subset GL(n, \Lambda)$, разумеется, совпадает с подгруппой $E(n, \Lambda)$, порожденной элементарными матрицами.

Перейдем теперь к прямому пределу при $n \rightarrow \infty$. Это определит группы и гомоморфизм

$$\varphi: \text{St}(\Lambda) \rightarrow GL(\Lambda).$$

Заметим, что образ $\varphi(\text{St}(\Lambda)) = E(\Lambda)$ совпадает с коммутантом группы $GL(\Lambda)$ (ср. 3.1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Ядро гомоморфизма $\varphi: \text{St}(\Lambda) \rightarrow GL(\Lambda)$ обозначается $K_2\Lambda$.

Мы докажем следующий факт.

ТЕОРЕМА 5.1. *Группа $K_2\Lambda = \text{Ker } \varphi$ совпадает с центром группы Стейнберга $\text{St}(\Lambda)$.*

Группа $K_2\Lambda$, таким образом, абелева и входит в точную последовательность

$$1 \rightarrow K_2\Lambda \rightarrow \text{St}(\Lambda) \rightarrow GL(\Lambda) \rightarrow K_1\Lambda \rightarrow 1.$$

Интуитивно $K_2\Lambda$ можно представлять себе как группу всех нетривиальных соотношений между элементарными матрицами (ср. Gersten S., Thesis, Cambridge, 1965) по модулю «тривиальных» — следствий из (1), (2) и (3). Действительно, любое соотношение

$$e_{i_1 j_1}^{\lambda_1} e_{i_2 j_2}^{\lambda_2} \dots e_{i_r j_r}^{\lambda_r} = I$$

между элементарными матрицами определяет некоторый элемент $x_{i_1 j_1}^{\lambda_1} x_{i_2 j_2}^{\lambda_2} \dots x_{i_r j_r}^{\lambda_r}$ группы $K_2\Lambda$, и любой элемент $K_2\Lambda$ получается так.

Вот пример: матрица

$$e_{12}^1 e_{21}^{-1} e_{12}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

в $E(2, Z)$ представляет поворот на 90° и потому имеет период 4. Соотношение в $E(Z)$

$$(e_{12}^1 e_{21}^{-1} e_{12}^1)^4 = I$$

определяет некоторый элемент $(x_{12}^1 x_{21}^{-1} x_{12}^1)^4$ в $K_2 Z$. В § 10 мы увидим, что $K_2 Z$ — циклическая группа порядка 2 и порождена как раз этим элементом $(x_{12}^1 x_{21}^{-1} x_{12}^1)^4$.

Заметим, что K_2 — ковариантный функтор на кольцах со значениями в абелевых группах. Действительно, любой гомоморфизм колец $\Lambda \rightarrow \Lambda'$, очевидно, определяет коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \rightarrow & K_2 \Lambda & \rightarrow & \text{St}(\Lambda) & \rightarrow & GL(\Lambda) \rightarrow K_1 \Lambda \rightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \rightarrow & K_2 \Lambda' & \rightarrow & \text{St}(\Lambda') & \rightarrow & GL(\Lambda') \rightarrow K_1 \Lambda' \rightarrow 1. \end{array}$$

Доказательство теоремы 5.1. Сначала напомним хорошо известный факт, что $(n \times n)$ -матрица (a_{ij}) коммутирует со всеми элементарными $(n \times n)$ -матрицами в том и только том случае, когда (a_{ij}) диагональна, $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn}$ и эти элементы лежат в центре кольца Λ . Действительно, прямое вычисление показывает, что если (a_{ij}) коммутирует с e_{kl}^1 , то $a_{lk} = 0$ и $a_{kk} = a_{ll}$.

В частности, никакой элемент подгруппы

$$E(n-1, \Lambda) \subset E(n, \Lambda),$$

кроме единичного, не лежит в центре группы $E(n, \Lambda)$. Переходя к прямому пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем, что центр предельной группы $E(\Lambda)$ тривиален.

Значит, элементы центра группы $\text{St}(\Lambda)$ должны переходить в центр $E(\Lambda)$, т. е. в единицу, при гомоморфизме φ .

Обратно, пусть $\varphi(y) = I$. Мы должны установить, что y коммутирует с любой образующей x_{ij}^λ группы Стейнберга. Выберем такое достаточно большое целое число n , что y представляется в виде произведения образующих x_{ij}^λ с $i < n$ и $j < n$. Обозначим через P_n

подгруппу $\text{St}(\Lambda)$, порожденную образующими $x_{1n}^\mu, x_{2n}^\mu, \dots$
 $\dots, x_{n-1,n}^\mu$, где μ пробегает элементы Λ . В силу соотношений (1) эта группа коммутативна.

Лемма 5.2. *Любой элемент группы P_n однозначно записывается в виде произведения*

$$x_{1n}^{\mu_1} x_{2n}^{\mu_2} \dots x_{n-1,n}^{\mu_{n-1}}.$$

Следовательно, канонический гомоморфизм φ отображает P_n изоморфно в группу $E(\Lambda)$.

Доказательство получается непосредственно.

Заметим теперь, что $x_{ij}^\lambda P_n x_{ij}^{-\lambda} \subset P_n$, если $i, j < n$. Действительно, любой элемент $x_{ij}^\lambda x_{kn}^\mu x_{ij}^{-\lambda}$, сопряженный с образующей группы P_n , равен либо x_{kn}^μ , либо $x_{in}^{\lambda\mu} x_{kn}^\mu$ в соответствии с тем, $j \neq k$ или $j = k$. Но оба этих выражения сами лежат в P_n .

Учитывая теперь, что y является произведением образующих x_{ij}^λ с $i, j < n$, получаем $y P_n y^{-1} \subset P_n$. Но поскольку $\varphi(y) = I$, y на самом деле коммутирует со всеми элементами $p \in P_n$. Действительно,

$$\varphi(y p y^{-1}) = \varphi(y) \varphi(p) \varphi(y^{-1}) = \varphi(p),$$

так что $y p y^{-1} = p$ в силу 5.2.

Таким образом, y коммутирует с любой образующей x_{kn}^μ , $k < n$. Совершенно аналогичное рассуждение показывает, что y коммутирует со всеми x_{nl}^μ , $l < n$. Значит, y коммутирует и с коммутатором

$$[x_{kn}^\mu, x_{nl}^1] = x_{kl}^\mu$$

для всех $k \neq l$, $k, l < n$. Это завершает доказательство 5.1, потому что n можно взять как угодно большим. ■

Универсальные центральные расширения

Существует более инвариантная характеристика группы Стейнберга $\text{St}(\Lambda)$ как «универсального центрального расширения» группы $E(\Lambda) = [GL(\Lambda), GL(\Lambda)]$.

Это описание было дано Стейнбергом и Кервером. Начнем с необходимых определений.

Центральным расширением группы G называется пара (X, φ) , состоящая из группы X и гомоморфизма φ из X на G , ядро которого принадлежит центру X . (Если из контекста ясно, какой гомоморфизм имеется в виду, то мы для краткости будем называть центральным расширением G просто X .)

Центральное расширение (U, ψ) группы G называется *универсальным*, если для любого центрального расширения (X, φ) группы G существует единственный гомоморфизм U на X над G (т. е. гомоморфизм $h: U \rightarrow X$ со свойством $\varphi \circ h = \psi$).

Ясно, что если такое универсальное центральное расширение существует, то оно определено однозначно с точностью до изоморфизма над G . Чтобы описывать универсальные центральные расширения, нам понадобятся еще два понятия.

Центральное расширение (X, φ) группы G *расщепляется*, если у него есть сечение, т. е. гомоморфизм $s: G \rightarrow X$ над G . Ясно, что если (X, φ) расщепляется, то X изоморфно прямому произведению $G \times \text{Ker } \varphi$.

Группа G называется *совершенной*, если она совпадает со своим коммутантом $[G, G]$.

ТЕОРЕМА 5.3. *Центральное расширение (U, ψ) группы G является универсальным в том и только в том случае, когда U совершенна, а любое центральное расширение группы U расщепляется.*

Доказательство. Предположим сначала, что любое центральное расширение группы U расщепляется. Тогда для любого центрального расширения (X, φ) группы G можно следующим образом построить гомоморфизм из U в X над G . Обозначим через $U \times_G X$ подгруппу в $U \times X$, состоящую из всех пар (u, x) с $\psi(u) = \varphi(x)$, и положим $\pi(u, x) = u$.

Таким образом $(U \times_G X, \pi)$ является центральным расширением U , значит, существует сечение $s: U \rightarrow U \times_G X$. Полагая $s(u) = (u, h(u))$, мы получим требуемый гомоморфизм h из U в X над G .

Доказательство единственности h основано на следующих соображениях. Пусть (X, φ) и (Y, ψ) — центральные расширения группы G .

Лемма 5.4. *Если группа Y совершенна, то существует не больше одного гомоморфизма из Y в X над G .*

Доказательство. Пусть f_1, f_2 — гомоморфизмы из Y в X над G . Тогда для всех $y, z \in Y$ мы можем записать

$$f_1(y) = f_2(y) c, \quad f_1(z) = f_2(z) c',$$

где элементы c и c' принадлежат ядру φ и, значит, центру X . Поэтому

$$f_1(yzy^{-1}z^{-1}) = f_2(yzy^{-1}z^{-1}).$$

Так как Y порождена коммутаторами, это показывает, что $f_1 = f_2$. ■

Итак, мы доказали, что если U — совершенная группа и любое ее центральное расширение расщепляется, то (U, ψ) — универсальное центральное расширение G . Для доказательства обратного утверждения начнем с обращения леммы 5.4.

Пусть снова (Y, ψ) — некоторое центральное расширение группы G .

Лемма 5.5. *Если Y не совершенна, то для подходящего расширения (X, φ) существует больше одного гомоморфизма из Y в X над G .*

Доказательство. Действительно, если Y — не совершенная группа, то существует ненулевой гомоморфизм h из Y в некоторую абелеву группу A . Пусть (X, φ) — расщепляющееся расширение $G \times A \rightarrow G$, $\varphi(g, a) = g$. Положив

$$f_1(y) = (\psi(y), 1), \quad f_2(y) = (\psi(y), h(y)),$$

мы получим два разных гомоморфизма из Y в $G \times A$ над G , что доказывает 5.5. ■

Нам понадобится также следующая

Лемма 5.6. *Если (X, φ) — центральное расширение совершенной группы P , то коммутант $X' = [X, X]$*

является совершенной группой, которая отображается на всю группу P .

Таким образом, $(X', \varphi|X')$ является совершенным центральным расширением P .

Доказательство. Так как P порождена коммутаторами, ясно, что φ отображает X' на всю P . Значит, любой элемент x из X можно записать в виде произведения $x's$, где $x' \in X'$, а s лежит в центре. Значит, каждая образующая X' вида $[x_1, x_2]$ равна $[x'_1 s_1, x'_2 s_2] = [x'_1, x'_2]$ для некоторых x'_1 и x'_2 из X' . Следовательно, $X' = [X', X']$, что доказывает 5.6. ■

Вернемся теперь к доказательству теоремы 5.3. Пусть (U, υ) — универсальное центральное расширение группы G . Из леммы 5.5 следует, что U совершенна. Мы должны показать, что любое центральное расширение группы U расщепляется.

Мы покажем, что для любого центрального расширения (X, φ) группы U композиция

$$X \xrightarrow{\varphi} U \xrightarrow{\upsilon} G$$

является центральным расширением G . Действительно, пусть $\upsilon(\varphi(x_0)) = 1$; тогда $\varphi(x_0)$ принадлежит центру группы U , поэтому отображение

$$x \mapsto x_0 x x_0^{-1}$$

является автоморфизмом X над U . Ограничивая его на коммутант X' и пользуясь леммами 5.4 и 5.6, мы находим, что соответствующий автоморфизм X' над U тождествен. Значит, x_0 коммутирует с элементами из X' . Но X порождена подгруппой X' и центральной подгруппой $\text{Ker } \varphi$; поэтому x_0 коммутирует со всеми элементами из X .

Итак, $(X, \upsilon \circ \varphi)$ — центральное расширение G . Поскольку расширение (U, υ) универсально, существует гомоморфизм $s: U \rightarrow X$ над G . Композиция $\varphi \circ s$ является гомоморфизмом из U в U над G ; этот гомоморфизм может быть только тождественным. Значит, s — сечение (X, φ) . Это показывает, что каждое центральное расширение группы U расщепляется, и завершает доказательство 5.3. ■

ТЕОРЕМА 5.7. *Универсальное центральное расширение группы G существует в том и только том случае, когда G совершенна.*

В самом деле, если универсальное центральное расширение (U, υ) существует, то группа U совершенна, и G как ее гомоморфный образ тоже должна быть совершенной.

Обратно, если G совершенна, выберем гомоморфизм свободной группы F на G и обозначим через R его ядро. Тогда $[R, F]$ — нормальная подгруппа в F , и существует естественная сюръекция

$$\varphi: F/[R, F] \rightarrow F/R \cong G.$$

Очевидно, ядро φ центрально. Из 5.6 тогда следует, что коммутант

$$(F/[R, F])' \cong [F, F]/[R, F]$$

является совершенным центральным расширением группы G .

Покажем, что это центральное расширение $[F, F]/[R, F] \rightarrow G$ универсально. Действительно, пусть (X, ψ) — любое центральное расширение группы G . Так как F свободна, существует некоторый гомоморфизм $h: F \rightarrow X$ над G . Далее, $h([R, F]) = 1$, потому что (X, ψ) — центральное расширение. Значит, h индуцирует некоторый гомоморфизм из $F/[R, F]$ в X над G . Ограничивая его на $[F, F]/[R, F]$, мы получаем нужный гомоморфизм из $[F, F]/[R, F]$ в X над G ; он единствен в силу 5.4. ■

СЛЕДСТВИЕ 5.8. *Ядро универсального центрального расширения $[F, F]/[R, F] \rightarrow G$ канонически изоморфно двумерной группе гомологий $H_2(G; \mathbb{Z})$.*

Доказательство. Это ядро является центральной подгруппой

$$(R \cap [F, F])/[R, F]$$

группы $[F, F]/[R, F]$. Именно так Хопф и определял двумерную группу гомологий группы G в статье, указавшей путь к современной гомологической алгебре. (См. Hopf H., Fundamentalgruppe und zweite Bettische Gruppe, *Comment. Math. Helv.*, 14 (1941 — 1942),

257 — 309.) По нынешним временам следует начать с гомологической спектральной последовательности для расширения групп $1 \rightarrow R \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow 1$, которая доставляет точную последовательность

$$H_2F \rightarrow H_2G \rightarrow H_0(G; H_1R) \rightarrow H_1F \rightarrow H_1G \rightarrow 0,$$

т. е.

$$0 \rightarrow H_2G \rightarrow R/[R, F] \rightarrow F/[F, F] \rightarrow 0 \rightarrow 0,$$

откуда и следует наше заключение. (Этот вариант доказательства сообщил мне Тэйт.) Здесь и ниже H_2G всегда означает $H_2(G; Z)$, где G действует на Z тривиально. ■

Замечание. Впервые универсальные центральные расширения конечных групп ввел Шур (Schur J., Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen, *J. reine angew. Math.*, **127** (1904), 20 — 40). Поэтому центральная подгруппа

$$(R \cap [F, F])/[R, F] \cong H_2G$$

часто называется мультипликатором Шура группы G .

Вот список ее стандартных свойств.

ЛЕММА 5.9. Любой гомоморфизм $h: G_1 \rightarrow G_2$ совершенных групп индуцирует некоторый гомоморфизм $h_*: H_2G_1 \rightarrow H_2G_2$ их мультипликаторов Шура. Если h — внутренний автоморфизм группы G , то h_* — тождественное отображение H_2G . Если G — прямой предел последовательности $G_1 \rightarrow G_2 \rightarrow G_3 \rightarrow \dots$ совершенных групп, то H_2G — прямой предел последовательности $H_2G_1 \rightarrow H_2G_2 \rightarrow H_2G_3 \rightarrow \dots$.

Доказательства несложны.

Рассмотрим теперь группу Стейнберга $St(\Lambda)$ кольца Λ . Из вида определяющих соотношений ясно, что $St(\Lambda)$ — совершенная группа. Из теоремы 5.1 следует, что она является центральным расширением $E(\Lambda)$.

ТЕОРЕМА 5.10. Группа Стейнберга $St(\Lambda)$ является универсальным центральным расширением группы $E(\Lambda)$. Следовательно, ядро $K_2\Lambda$ канонического отображения $\varphi: St(\Lambda) \rightarrow E(\Lambda)$ можно отождествить с мультипликатором Шура $H_2E(\Lambda)$.

(См. Стейберг Р., Лекции о группах Шевалле, § 7, Kervaire M., Multiplicateurs de Schur et K -theorie, а также Swan R., Algebraic K -theory, стр. 208.)

Опишем сначала план доказательства. Рассмотрим любое центральное расширение

$$(4) \quad 1 \rightarrow C \rightarrow Y \xrightarrow{\varphi} \text{St}(\Lambda) \rightarrow 1.$$

Его сечение $s: \text{St}(\Lambda) \rightarrow Y$ строится следующим способом. Для любой образующей x_{ij}^λ группы $\text{St}(\Lambda)$ выберем индекс h , отличный от i, j , и два элемента

$$y \in \varphi^{-1}(x_{ih}^1), \quad y' \in \varphi^{-1}(x_{hj}^\lambda)$$

и построим коммутатор

$$s_{ij}^\lambda = [y, y'] \in \varphi^{-1}(x_{ij}^\lambda).$$

Очевидно, он не зависит от выбора y и y' . (Ср. § 8.) Мы докажем, что он не зависит и от выбора h и что элементы s_{ij}^λ удовлетворяют всем соотношениям Стейнберга. Таким образом, отображение $x_{ij}^\lambda \mapsto s_{ij}^\lambda$ продолжается до нужного гомоморфизма $s: \text{St}(\Lambda) \rightarrow Y$. Тем самым всякое центральное расширение группы $\text{St}(\Lambda)$ расщепляется. Из теоремы 5.3 тогда следует, что $(\text{St}(\Lambda), \varphi)$ — универсальное центральное расширение группы $E(\Lambda)$.

Замечание. Наше доказательство будет применимо также к центральным расширениям группы $\text{St}(n, \Lambda)$ при условии, что $n \geq 5$. Таким образом, если ядро гомоморфизма $\text{St}(n, \Lambda) \rightarrow E(n, \Lambda)$ лежит в центре и если $n \geq 5$, то $\text{St}(n, \Lambda)$ — универсальное центральное расширение группы $E(n, \Lambda)$. Это так, например, для полей и тел. (Ср. п. 9.12.) Стейнберг показал, что если Λ — поле, то $\text{St}(n, \Lambda)$ является универсальным центральным расширением группы $E(n, \Lambda)$ даже для $n=3$ и $n=4$, за исключением ровно трех случаев: группы $\text{St}(3, F_2)$, $\text{St}(3, F_4)$ и $\text{St}(4, F_2)$ имеют нетривиальные мультипликаторы Шура. (Здесь F_q — поле из q элементов.)

Начнем доказательство теоремы 5.10 с рассмотрения произвольного центрального расширения

$$1 \rightarrow C \rightarrow Y \xrightarrow{\varphi} \text{St}(n, \Lambda) \rightarrow 1,$$

где $n \geq 5$. Если $x, x' \in \text{St}(n, \Lambda)$, символ

$$[\varphi^{-1}x, \varphi^{-1}x'] \in Y$$

будет обозначать коммутатор $[y, y']$, вычисленный для любых двух элементов $y \in \varphi^{-1}(x)$, $y' \in \varphi^{-1}(x')$. Очевидно, от их выбора результат не зависит. Нас будут особенно интересовать коммутаторы вида $[\varphi^{-1}x_{ij}^\lambda, \varphi^{-1}x_{kl}^\mu]$.

Лемма 5.11. Если $j \neq k$ и $l \neq i$, то коммутатор $[\varphi^{-1}x_{ij}^\lambda, \varphi^{-1}x_{kl}^\mu]$ тривиален.

Доказательство. Так как $n \geq 5$, мы можем выбрать индекс h , отличный от i, j, k, l . Выбрав элементы

$$y \in \varphi^{-1}(x_{ih}^\lambda), y' \in \varphi^{-1}(x_{hj}^\lambda), y'' \in \varphi^{-1}(x_{kl}^\mu),$$

получаем

$$[y, y'] \in \varphi^{-1}(x_{ij}^\lambda).$$

Но коммутаторы y с y'' и y' с y'' лежат в центре. Отсюда легко следует, что $[y, y']$ коммутирует с y'' . Таким образом,

$$[\varphi^{-1}x_{ij}^\lambda, \varphi^{-1}x_{kl}^\mu] = [[y, y'], y''] = 1,$$

как и утверждалось. ■

Дальше по ходу доказательства нам понадобятся несколько тождеств между коммутаторами, которые справедливы в любой группе G . Напомним определение:

$$[u, v] = uvu^{-1}v^{-1} = [v, u]^{-1}.$$

Равенство

$$(5) \quad [u, v][u, w] = [u, vw][v, [w, u]]$$

проверяется без усилий. Пользуясь им, докажем тождество Якоби

$$(6) \quad [u, [v, w]][v, [w, u]][w, [u, v]] \equiv 1 \pmod{G''},$$

где $G'' = [[G, G], [G, G]]$ — второй коммутант. Действительно, если переписать (5) в виде $[v, [w, u]] = [vw, u][u, v][u, w]$, то левая часть (6) переписывается так:

$$\begin{aligned} [uv, w][w, u][w, v][vw, u][u, v][u, w][wu, v][v, w][v, u] &\equiv \\ &\equiv [uv, w][wu, v][vw, u] = 1 \pmod{G''}. \end{aligned}$$

В случае когда u, w коммутируют, тождество Якоби превращается в ассоциативный закон

$$(7) \quad [[u, v], w] = [u, [v, w]] \bmod G''.$$

Теперь вернемся к доказательству теоремы 5.10. Выберем четыре разных индекса h, i, j, k и три элемента

$$u \in \varphi^{-1}(x_{hi}^1), \quad v \in \varphi^{-1}(x_{ij}^\lambda), \quad w \in \varphi^{-1}(x_{jk}^\mu).$$

Из 5.11 следует, что $[u, w] = 1$. Пусть, далее, G обозначает подгруппу группы Y , порожденную u, v и w . Тогда коммутатор G' порожден элементами, лежащими в $\varphi^{-1}(x_{hj}^\lambda)$, $\varphi^{-1}(x_{ik}^{\lambda\mu})$ и $\varphi^{-1}(x_{hk}^{\lambda\mu})$, откуда следует, что $G'' = 1$. Следовательно,

$$[[u, v], w] = [u, [v, w]],$$

т. е.

$$(8) \quad [\varphi^{-1}x_{hj}^\lambda, \varphi^{-1}x_{jk}^\mu] = [\varphi^{-1}x_{hi}^1, \varphi^{-1}x_{ik}^{\lambda\mu}].$$

Полагая здесь $\lambda = 1$, убеждаемся, что элемент

$$s_{hk}^\mu = [\varphi^{-1}x_{hj}^1, \varphi^{-1}x_{jk}^\mu]$$

не зависит от выбора j .

Доказательство того, что элементы s_{hk}^μ удовлетворяют трем соотношениям Стейнберга. Учитывая, что $s_{hk}^\mu \in \varphi^{-1}(x_{hk}^{\lambda\mu})$, мы можем переписать тождество (8) в виде

$$[s_{hj}^\lambda, s_{jk}^\mu] = s_{hk}^{\lambda\mu} \text{ для различных } h, j, k.$$

Чтобы проверить первое соотношение Стейнберга, мы применим тождество

$$(5) \quad [u, v][u, w] = [u, vw][v, [w, u]]$$

к элементам

$$u \in \varphi^{-1}(x_{hj}^1), \quad v \in \varphi^{-1}(x_{jk}^\lambda), \quad w \in \varphi^{-1}(x_{jk}^\mu).$$

Тогда

$$[u, v] = s_{hk}^\lambda, \quad [u, w] = s_{hk}^\mu, \quad [u, vw] = s_{hk}^{\lambda+\mu}$$

и

$$[v, [w, u]] = [\varphi^{-1}x_{jk}^\lambda, \varphi^{-1}x_{hk}^{-\mu}] = 1,$$

что и дает нужное соотношение

$$s_{hk}^\lambda s_{hk}^\mu = s_{hk}^{\lambda+\mu}.$$

Так как третье соотношение Стейнберга следует из 5.11, мы проверили все три. Итак, *любое центральное расширение группы $St(n, \Lambda)$ расщепляется при $n \geq 5$* . Это завершает доказательство 5.10. ■

Одна операция умножения

Предположим теперь, что Λ — коммутативное кольцо. Пользуясь представлением $K_2\Lambda \cong H_2E(\Lambda)$, покажем, что $K_2\Lambda$ — модуль над кольцом $K_0\Lambda$. Конструкция, описанная после леммы 3.2, доставляет для каждого проективного модуля P с $P \oplus Q \cong \Lambda^r$ гомоморфизм

$$h_P: GL(n, \Lambda) \rightarrow GL(rn, \Lambda) \subset GL(\Lambda),$$

определенный с точностью до внутреннего автоморфизма группы $GL(\Lambda)$. Очевидно, h_P переводит группу $E(n, \Lambda)$, $n \geq 3$, в коммутант $E(\Lambda)$, и гомоморфизм $E(n, \Lambda) \rightarrow E(\Lambda)$ определен с точностью до внутреннего автоморфизма группы $E(\Lambda)$. Следовательно, индуцированное отображение

$$h_{P*}: H_2E(n, \Lambda) \rightarrow H_2E(\Lambda)$$

определено однозначно. Далее можно проверить, что $h_{(P \oplus Q)*} = h_{P*} + h_{Q*}$. Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, мы получаем искомый гомоморфизм «умножение на $[P]$ » из $K_2\Lambda$ в $K_2\Lambda$.

Как в § 4, можно определить группу K_2a идеала a и построить умножения

$$K_0\Lambda \otimes K_2a \rightarrow K_2a$$

и

$$K_2\Lambda \otimes K_0a \rightarrow K_2a.$$

§ 6. ПРОДОЛЖЕНИЕ ТОЧНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

В этом параграфе мы продолжим точные последовательности из § 3 и 4, добавив к ним соответствующие K_2 -члены. Единственное изменение, которое заслуживает быть отмеченным, состоит в том, что для продолжения последовательности Майера — Виеториса из § 3 нам понадобится условие, чтобы все гомоморфизмы колец в диаграмме были сюръективными. Начнем с последовательности из § 4.

Пусть α — двусторонний идеал в кольце Λ . Как в § 4, рассмотрим проекцию $p_1: D \rightarrow \Lambda$ на первую координату, где D состоит из пар (λ, λ') , $\lambda \equiv \lambda' \pmod{\alpha}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. $\text{St}(\alpha)$ — это ядро индуцированного гомоморфизма $p_{1*}: \text{St}(D) \rightarrow \text{St}(\Lambda)$.

ЛЕММА 6.1. *Гомоморфизм $p_{2*}: \text{St}(\alpha) \rightarrow \text{St}(\Lambda)$ дает точную последовательность*

$$\text{St}(\alpha) \rightarrow \text{St}(\Lambda) \rightarrow \text{St}(\Lambda/\alpha) \rightarrow 1.$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что $\text{St}(\alpha)$ совпадает с подгруппой в $\text{St}(D)$, порожденной всеми выражениями вида $\Delta_*(s)x_{ij}^{(0, a)}\Delta_*(s^{-1})$, где $s \in \text{St}(\Lambda)$ и $a \in \alpha$, так что $(0, a)$ является элементом кольца D . Здесь $\Delta: \Lambda \rightarrow D$ — диагональное отображение. Доказательство этого утверждения аналогично доказательству леммы 4.2, и мы оставим его читателю.

Следовательно, образ $p_{2*} \text{St}(\alpha)$ совпадает с подгруппой $\text{St}(\Lambda)$, порожденной элементами вида $sx_{ij}^a s^{-1}$, т. е. с наименьшей нормальной подгруппой, содержащей все x_{ij}^a с $a \in \alpha$. Но если мы присоединим к образующим и соотношениям группы $\text{St}(\Lambda)$ новые соотношения $x_{ij}^a = 1$ и, значит, $x_{ij}^\lambda = x_{ij}^{\lambda'}$ при $\lambda \equiv \lambda' \pmod{\alpha}$, то мы как раз получим образующие и соотношения для группы $\text{St}(\Lambda/\alpha)$. Это завершает доказательство леммы 6.1. ■

Отождествим конгруэнц-подгруппу $GL(\alpha)$ с ядром гомоморфизма $p_{1*}: GL(D) \rightarrow GL(\Lambda)$. Отображая точную последовательность

$$1 \rightarrow K_2 D \rightarrow \text{St}(D) \rightarrow GL(D) \rightarrow K_1 D \rightarrow 1$$

посредством p_{1*} на соответствующую последовательность для Λ , мы получаем точную последовательность ядер

$$1 \rightarrow K_2 a \rightarrow \text{St}(a) \rightarrow GL(a) \rightarrow K_1 a \rightarrow 1.$$

Здесь $K_2 a$ определена, как в начале § 4. Рассматривая коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & & \downarrow & & \\ 1 & \rightarrow & K_2 a & \rightarrow & \text{St}(a) & \rightarrow & GL(a) \rightarrow K_1 a \rightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \rightarrow & K_2 \Lambda & \rightarrow & \text{St}(\Lambda) & \rightarrow & GL(\Lambda) \rightarrow K_1 \Lambda \rightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \rightarrow & K_2 \Lambda' & \rightarrow & \text{St}(\Lambda') & \rightarrow & GL(\Lambda') \rightarrow K_1 \Lambda' \rightarrow 1 \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & 1 & & \end{array}$$

в которой $\Lambda' = \Lambda/a$, мы можем доказать следующий результат.

ТЕОРЕМА 6.2. *Существует точная последовательность*

$$K_2 a \rightarrow K_2 \Lambda \rightarrow K_2 \Lambda' \xrightarrow{\partial} K_1 a \rightarrow K_1 \Lambda \rightarrow \dots,$$

продолжающая точную последовательность из § 4.

Здесь гомоморфизм ∂ строится как композиция переходов из $K_2 \Lambda'$ в $\text{St}(\Lambda')$, затем в $\text{St}(\Lambda)$, $GL(\Lambda)$, $GL(a)$ (этот шаг однозначен) и, наконец, в $K_1 a$. Результат не зависит от произвольных выборов, ибо любые два элемента из $\text{St}(\Lambda)$ с общим образом в $\text{St}(\Lambda')$ отличаются на элемент из $\text{St}(a)$, который переходит в 1 в $K_1 a$. Дальнейшие детали мы оставляем читателю.

Рассмотрим теперь некоторый гомоморфизм колец $f: \Lambda \rightarrow \Gamma$. Пусть $a \subset \Lambda$ и $b \subset \Gamma$ — двусторонние идеалы с $f(a) \subset b$. По этим данным определена коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \rightarrow & K_2 a & \rightarrow & \text{St}(a) & \rightarrow & GL(a) \rightarrow K_1 a \rightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \rightarrow & K_2 b & \rightarrow & \text{St}(b) & \rightarrow & GL(b) \rightarrow K_1 b \rightarrow 1 \end{array}$$

ЛЕММА О ВЫРЕЗАНИИ 6.3. *Если гомоморфизм $f: \Lambda \rightarrow \Gamma$ сюръективен и взаимно однозначно отображает a на b , то индуцированный гомоморфизм $f_*: K_2 a \rightarrow K_2 b$ сюръективен, а $f_*: K_1 a \rightarrow K_1 b$ является изоморфизмом.*

Доказательство. Так как α взаимно однозначно отображается на $\mathfrak{b}$, ясно, что $GL(\alpha)$ изоморфно отображается на $GL(\mathfrak{b})$. Напомним, далее, что, согласно 6.1, группа $St(\mathfrak{b})$ порождена выражениями $\Delta_*(s) x_{ij}^{(0, \mathfrak{b})} \Delta_*(s^{-1})$, где $s \in St(\Gamma)$. Так как, кроме того, $St(\Lambda)$ отображается на $St(\Gamma)$, а α отображается на $\mathfrak{b}$, ясно, что $St(\alpha)$ отображается на $St(\mathfrak{b})$. Отсюда легко следует лемма. (Ср. Басс Х., Алгебраическая K-теория, стр. 304.) ■

По-прежнему предполагая, что f сюръективно и отображает изоморфно α на $\mathfrak{b}$, мы получаем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccccc} K_2\alpha & \rightarrow & K_2\Lambda & \rightarrow & K_2\Lambda' & \rightarrow & K_1\alpha & \rightarrow & K_1\Lambda & \rightarrow & K_1\Lambda' \\ \downarrow \text{на} & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \cong & & \downarrow & & \downarrow \\ K_2\mathfrak{b} & \rightarrow & K_2\Gamma & \rightarrow & K_2\Gamma' & \rightarrow & K_1\mathfrak{b} & \rightarrow & K_1\Gamma & \rightarrow & K_1\Gamma' \end{array}$$

Здесь $\Lambda' = \Lambda/\alpha$ и $\Gamma' = \Gamma/\mathfrak{b}$. Из нее легко извлекается точная последовательность

$$K_2\Lambda \rightarrow K_2\Gamma \oplus K_2\Lambda' \rightarrow K_2\Gamma' \rightarrow K_1\Lambda \rightarrow K_1\Gamma \oplus K_1\Lambda' \rightarrow K_1\Gamma'.$$

Итак, мы доказали следующий результат.

ТЕОРЕМА 6.4. Если коммутативный квадрат сюръективных гомоморфизмов колец

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \rightarrow & \Lambda' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma & \rightarrow & \Gamma' \end{array}$$

удовлетворяет условиям § 2, то точная последовательность Майера — Виеториса из § 3 может быть дополнена членами

$$K_2\Lambda \rightarrow K_2\Gamma \oplus K_2\Lambda' \rightarrow K_2\Gamma' \rightarrow K_1\Lambda \rightarrow \dots$$

В самом деле, условия § 2 означают, что Λ совпадает с произведением Γ и Λ' над Γ' и что хотя один из гомоморфизмов в Γ' сюръективен. Но если $\Lambda' = \Lambda/\alpha$ и $\Gamma' = \Gamma/\mathfrak{b}$, то первое условие, очевидно, равносильно требованию, чтобы идеал α взаимно однозначно отображался на $\mathfrak{b}$. ■

Замечание 6.5. Суон недавно показал, что невозможно определить функтор K_3 таким образом, чтобы

§ 7. СЛУЧАЙ КОММУТАТИВНОЙ БАНАХОВОЙ АЛГЕБРЫ

Пусть Λ — коммутативная банахова алгебра над вещественными или комплексными числами. Например, в качестве Λ можно взять кольцо R^X непрерывных вещественных функций на компактном пространстве X . В этом параграфе мы используем топологию на $GL(n, \Lambda)$ для вычисления $K_1\Lambda$ и оценки $K_2\Lambda$.

Лемма 7.1. Группа $E(n, \Lambda)$ — открытая линейно связная подгруппа специальной линейной группы $SL(n, \Lambda)$.

Следовательно, $E(n, \Lambda)$ является связной компонентой единицы в $SL(n, \Lambda)$, так что факторгруппу $SL(n, \Lambda)/E(n, \Lambda)$ можно отождествить с группой $\pi_0 SL(n, \Lambda)$ линейно связных компонент.

Напомним теперь, что $K_1\Lambda$ расщепляется в прямую сумму группы $\Lambda^\bullet$ единиц и группы

$$\begin{aligned} SK_1\Lambda &= SL(\Lambda)/E(\Lambda) = \\ &= \varinjlim SL(n, \Lambda)/E(n, \Lambda) = \varinjlim \pi_0 SL(n, \Lambda). \end{aligned}$$

Если снабдить группу $SL(\Lambda)$ топологией индуктивного предела, то группа $\pi_0 SL(\Lambda)$, очевидно, отождествляется с $\varinjlim \pi_0 SL(n, \Lambda)$. Таким образом, мы получаем

Следствие 7.2. Группа $K_1\Lambda$ расщепляется в прямую сумму группы $\Lambda^\bullet$ единиц кольца Λ и группы $SK_1\Lambda \cong \pi_0 SL(\Lambda)$ линейно связных компонент группы $SL(\Lambda)$.

В частном случае $\Lambda = R^X$ это описание поддается дальнейшему упрощению. Так как мультипликативная группа $R^\bullet$ топологически изоморфна аддитивной группе $F_2 \oplus R$, мы имеем

$$(R^X)^\bullet \cong (R^\bullet)^X \cong (F_2)^X \oplus R^X.$$

Кроме того, группа вращений $SO(n)$ содержится в специальной линейной группе и является ее деформационным ретрактом (это можно доказать, например, с помощью процесса ортонормализации Грама — Шмидта).

Следовательно, пространство

$$SL(n, R^X) \cong SL(n, R)^X$$

содержит пространство $SO(n)^X$ в качестве деформационного ретракта. Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем

Следствие 7.3. *Группа $K_1 R^X$ расщепляется в прямую сумму группы $(R^\cdot)^X$ единиц и группы $\pi_0(SO^X)$ гомотопических классов отображений пространства X в бесконечномерную группу вращений SO .*

Аналогично для кольца C^X непрерывных комплексных функций мы находим

$$K_1 C^X \cong (C^\cdot)^X \oplus \pi_0(SU^X),$$

где SU — бесконечномерная специальная унитарная группа.

Докажем теперь лемму 7.1. Так как любую элементарную матрицу e_{ij}^λ можно соединить с единичной путем

$$t \mapsto e_{ij}^{t\lambda}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

группа $E(n, \Lambda)$ линейно связна. Чтобы установить, что $E(n, \Lambda)$ открыта (и, значит, замкнута), мы докажем более сильное утверждение. Пусть $I + A$ — некоторая $(n \times n)$ -матрица с определителем 1.

Лемма 7.4. *Если каждый элемент a_{ij} матрицы A удовлетворяет неравенству $\|a_{ij}\| < 1/(n-1)$, то матрица $I + A$ канонически представляется в виде произведения $n^2 + 5n - 6$ элементарных матриц, непрерывно зависящих от A .*

Доказательство. Обратный к элементу $1 + a_{11}$ элемент u удовлетворяет неравенству

$$\|u\| < \left(1 - \frac{1}{n-1}\right)^{-1} = \frac{n-1}{n-2}.$$

Вычитая из k -й строки первую, умноженную на ua_{k1} , для всех $k = 2, 3, \dots, n$, мы получим матрицу $I + (a'_{kj})$, у которой $a'_{21} = a'_{31} = \dots = a'_{n1} = 0$ и

$$\|a'_{kj}\| \leq \|a_{kj}\| + \|ua_{k1}a_{1j}\| < \frac{1}{n-1} + \frac{n-1}{n-2} \frac{1}{n-1} \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n-2}.$$

Продолжая по индукции, мы приведем матрицу к диагональному виду, сделав $n(n-1)$ элементарных операций над строками. Пусть

$$u^{-1}, uv^{-1}, v\omega^{-1}, \dots$$

— диагональные элементы. Умножив матрицу на

$$e_{12}^u e_{21}^{-u^{-1}} e_{12}^u e_{12}^{-1} e_{21}^1 e_{12}^{-1} = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix},$$

мы заменим u на 1. Продолжая по индукции, мы превратим диагональную матрицу в единичную после $6(n-1)$ операций над строками.

Это доказывает леммы 7.4 и 7.1. ■

Заметим теперь, что связная топологическая группа $E(n, \Lambda)$ локально стягиваема (это нетрудно показать, например, с помощью экспоненциального отображения). Поэтому у нее существует универсальная накрывающая группа $\tilde{E}$. Она является центральным расширением

$$1 \rightarrow \pi_1 E(n, \Lambda) \rightarrow \tilde{E} \rightarrow E(n, \Lambda) \rightarrow 1.$$

Для каждой элементарной матрицы $e_{ij}^\lambda \in E(n, \Lambda)$ можно выбрать в $\tilde{E}$ представитель $\tilde{e}_{ij}^\lambda$, который непрерывно зависит от λ и стремится к единице, когда $\lambda \rightarrow 0$. Действительно, достаточно поднять путь $t \mapsto e_{ij}^{t\lambda}$ в $\tilde{E}$ так, чтобы он начинался в единице.

Эти элементы $\tilde{e}_{ij}^\lambda$ удовлетворяют соотношениям Стейнберга $\tilde{e}_{ij}^\lambda \tilde{e}_{ij}^\mu = \tilde{e}_{ij}^{\lambda+\mu}$ и $[\tilde{e}_{ij}^\lambda, \tilde{e}_{kl}^\mu] = 1$ или $\tilde{e}_{il}^{\lambda\mu}$ в зависимости от того, $j \neq k$ или $j = k$ при $i \neq l$. Для доказательства нужно поднять пути $e_{ij}^{t\lambda} e_{ij}^{t\mu} = e_{ij}^{t(\lambda+\mu)}$ и $[e_{ij}^\lambda, e_{kl}^\mu]$ соответственно. Поэтому отображение

$$\varphi: x_{ij}^\lambda \mapsto \tilde{e}_{ij}^\lambda$$

определяет гомоморфизм группы Стейнберга $\text{St}(n, \Lambda)$ в $\tilde{E}$.

ЛЕММА 7.5. Гомоморфизм $\tilde{\varphi}: \text{St}(n, \Lambda) \rightarrow \tilde{E}$ сюръективен и отображает ядро гомоморфизма $\varphi: \text{St}(n, \Lambda) \rightarrow GL(n, \Lambda)$ на фундаментальную группу

$$\pi_1 E(n, \Lambda) = \pi_1 SL(n, \Lambda).$$

Доказательство. С помощью явной конструкции из леммы 7.4 мы можем непрерывно поднять некоторую окрестность элемента I из $E(n, \Lambda)$ в $\tilde{E}$, просто заменив все e_{ij}^λ на $\tilde{e}_{ij}^\lambda$. Так как любое открытое подмножество связной группы $\tilde{E}$ порождает всю группу, это показывает, что гомоморфизм $\tilde{\phi}$ сюръективен. Остальное ясно. ■

Переходя теперь к прямому пределу при $n \rightarrow \infty$, мы получаем

Следствие 7.6. *Предельный гомоморфизм $\tilde{\phi}$ отображает $K_2\Lambda$ на $\pi_1 SK(\Lambda)$.*

Например, если Λ — банахова алгебра вещественных чисел R , то фундаментальная группа

$$\pi_1 SL(R) \cong \pi_1 SO$$

— циклическая группа второго порядка. Отсюда следует, что K_2R состоит по крайней мере из двух элементов.

Позже мы установим, что K_2R на самом деле есть прямая сумма циклической группы второго порядка, пришедшей из K_2Z и ядра $\tilde{\phi}$, которое несчетно и является делимой группой. (Ср. п. 8.4. 10.2, 11.10.) В частности, сюръекция $\tilde{\phi}: K_2\Lambda \rightarrow \pi_1 SL(\Lambda)$, безусловно, не является изоморфизмом для $\Lambda = R$.

Вернемся теперь к кольцу $\Lambda = R^X$ непрерывных вещественных функций на компакте X . В этом случае группу $\pi_1 SL(n, R^X) = \pi_1 (SL(n, R)^X) = \pi_1 (SO(n)^X)$ можно отождествить с группой линейно связных компонент пространства петель $\Omega(SO(n)^X) = (\Omega SO(n))^X$. Следовательно, группа $\pi_1 SL(n, R^X)$ изоморфна группе гомотопических классов отображений из X в $\Omega SO(n)$.

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем

Следствие 7.7. *Группа $K_2(R^X)$ гомоморфно отображается на группу всех гомотопических классов отображений X в ΩSO .*

Пример. Если X есть 2-сфера, то эта гомотопическая группа является суммой циклической группы второго порядка (поскольку ΩSO состоит из двух ком-

понент) и бесконечной циклической группы (потому что $\pi_2 \Omega SO \cong \pi_3 SO \cong \mathbb{Z}$). Таким образом, в этом случае $K_2 R^X$ отображается на бесконечную циклическую группу.

Топологическая K -теория

Функтор $K_0 R^X$ допускает аналогичную топологическую интерпретацию. Если ξ — вещественное векторное расслоение над компактным пространством X , то множество его непрерывных сечений $\Gamma(\xi)$ является модулем над кольцом R^X . Подберем η так, чтобы прямая сумма $\xi \oplus \eta$ была тривиальным расслоением. Тогда модуль $\Gamma(\xi) \oplus \Gamma(\eta)$ свободен над R^X . Следовательно, $\Gamma(\xi)$ конечно порожден и проективен. Обратно, всякий конечно порожденный проективный модуль над R^X изоморфен $\Gamma(\xi)$, где векторное расслоение ξ определено, по существу, однозначно. См. Swan R., Vector bundles and projective modules, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 105 (1962), 264—277.

Рассмотрим теперь градуированное кольцо $KO^*(X)$ топологической K -теории (см. Атья М., Лекции по K -теории, «Мир», М., 1969). Очевидно, $K_0 R^X$ канонически изоморфно кольцу $KO^0(X) \cong \pi_0((\mathbb{Z} \otimes B_0)^X)$ виртуальных вещественных векторных расслоений над X . Результаты этого параграфа можно кратко описать с помощью следующей точной последовательности:

$$K_2 R^X \rightarrow KO^{-2} X \xrightarrow{0} R^X \xrightarrow{\exp} K_1 R^X \rightarrow KO^{-1} X \rightarrow 0 \rightarrow \\ \rightarrow K_0 R^X \rightarrow KO^0 X \rightarrow 0,$$

третий гомоморфизм которой переводит каждую функцию $f: X \rightarrow R$ в композицию $\exp \circ f \in (R^*)^X \subset K_1 R^X$.

Для кольца C^X непрерывных комплексных функций над X существует аналогичная точная последовательность:

$$K_2 C^X \rightarrow K^{-2} X \xrightarrow{h} C^X \xrightarrow{\exp} K_1 C^X \rightarrow K^{-1} X \rightarrow 0 \rightarrow \\ \rightarrow K_0 C^X \rightarrow K^0 X \rightarrow 0.$$

Здесь гомоморфизм h можно определить как композицию естественной сюръекции

$$K^{-2} X \cong K^0 X \rightarrow \mathbb{Z}^X$$

с вложением

$$\mathbb{Z}^X \cong (2\pi i \mathbb{Z})^X \subset C^X.$$

§ 8. УМНОЖЕНИЕ $K_1\Lambda \otimes K_1\Lambda \rightarrow K_2\Lambda$

Опишем один способ построения элементов группы $K_2\Lambda$. Предположим, что даны две коммутирующие матрицы

$$A, B \in E(\Lambda).$$

Выберем их представители $a, b \in \text{St}(\Lambda)$,

$$\varphi(a) = A, \quad \varphi(b) = B.$$

Коммутатор $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ является тогда элементом группы $K_2\Lambda$ (ср. п. 5.10). Этот коммутатор мы будем обозначать символом

$$A * B = aba^{-1}b^{-1} \in K_2\Lambda.$$

Заметим, что $A * B$ не зависит от выбора представителей a и b . Если, например, $\varphi(\bar{a})$ тоже равно A , то $\bar{a} = ac$ для некоторого элемента c из центра $\text{St}(\Lambda)$, так что

$$\bar{a}b\bar{a}^{-1}b^{-1} = a(cbc^{-1})a^{-1}b^{-1} = aba^{-1}b^{-1}.$$

ЛЕММА 8.1. *Описанная операция кососимметрична:*

$$B * A = (A * B)^{-1},$$

бимультимпликативна:

$$(A_1 A_2) * B = (A_1 * B)(A_2 * B)$$

и инвариантна относительно внутренних автоморфизмов $E(\Lambda)$:

$$(PAP^{-1}) * (PBP^{-1}) = A * B.$$

Доказательство. Эти утверждения немедленно следуют из тождеств

$$[b, a] = [a, b]^{-1},$$

$$[a_1 a_2, b] = [a_1, [a_2, b]][a_2, b][a_1, b]$$

и

$$[pap^{-1}, pbp^{-1}] = p[a, b]p^{-1}$$

соответственно. ■

Предположим теперь, что Λ — коммутативное кольцо. Пусть u, v — любые две его единицы. Тогда диагональные матрицы

$$D_u = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & u^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D'_v = \begin{pmatrix} v & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & v^{-1} \end{pmatrix}$$

коммутируют и лежат в $E(3, \Lambda)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Коммутатор $D_u * D'_v \in K_2 \Lambda$ будет обозначаться символом $\{u, v\}$.

ЛЕММА 8.2. Символ $\{u, v\}$ также кососимметричен:

$$\{u, v\} = \{v, u\}^{-1}$$

и бимультимпликативен:

$$\{u_1 u_2, v\} = \{u_1, v\} \{u_2, v\}.$$

Доказательство. Рассмотрим в $E(3, \Lambda)$ матрицу

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$PD_u P^{-1} = D'_u, \quad PD'_v P^{-1} = D_v.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \{u, v\}^{-1} &= (D_u * D'_v)^{-1} = D'_v * D_u = \\ &= (PD'_v P^{-1}) * (PD_u P^{-1}) = D_v * D_u = \{v, u\}. \end{aligned}$$

Оставшаяся часть доказательства очевидна. ■

Теперь мы в состоянии полностью описать $D * D'$ для любой пары диагональных матриц в $SL(n, \Lambda)$. Пусть $\text{diag}(u_1, \dots, u_n)$ — диагональная матрица с элементами $u_1, \dots, u_n$ на диагонали.

ЛЕММА 8.3. Если $u_1 u_2 \dots u_n = v_1 v_2 \dots v_n = 1$, то

$$\text{diag}(u_1, \dots, u_n) * \text{diag}(v_1, \dots, v_n)$$

совпадает с произведением

$$\{u_1, v_1\} \{u_2, v_2\} \dots \{u_n, v_n\}.$$

Доказательство оставляем читателю в качестве упражнения.

Приведем примеры, показывающие, что символ $\{u, v\}$ не равен тождественно 1. Напомним, что в § 7 был построен естественный гомоморфизм $\tilde{\varphi}$ из $K_2 R$ в фундаментальную группу $\pi_1 SL(R)$, которую мы отождествим с $\{\pm 1\}$.

ЛЕММА 8.4. Если $\Lambda = R$ — поле вещественных чисел, то

$$\tilde{\varphi}\{-1, -1\} = -1.$$

Отсюда легко следует, что

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}\{u, v\} &= -1, \text{ если } u < 0 \text{ и } v < 0, \\ \tilde{\varphi}\{u, v\} &= +1, \text{ если } u > 0 \text{ или } v > 0. \end{aligned}$$

Замечания. Отсюда следует, что $\{-1, -1\} \neq 1$, если Λ можно гомоморфно отобразить в вещественные числа. Более того, если Λ можно отобразить в R несколькими разными способами, то получающиеся значения $\{u, u\} \in K_2 \Lambda$ обычно оказываются линейно независимыми по модулю 2. Например, если $\Lambda = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, то $\{1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\}$ и $\{-1, -1\}$ независимы. А если $\Lambda = \mathbb{Z}\pi$, где π — циклическая группа второго порядка с образующей t , то $\{t, t\}$ и $\{-1, -1\}$ независимы.

Доказательство леммы 8.4. Группа $SL(n, R)$ содержит группу вращений $SO(n)$ в качестве деформационного ретракта. Напомним, что универсальное накрытие группы $SO(3)$ можно отождествить с группой S^3 кватернионов с нормой единица. В самом деле, пусть R_0^3 — вещественное векторное пространство, порожденное кватернионными единицами i, j, k . Тогда любой элемент $\xi \in S^3$ определяет вращение этого пространства

$$\eta \mapsto \xi \eta \xi^{-1}$$

и только $\pm 1 \in S^3$ дают тождественное вращение. Заметим, в частности, что кватернионные единицы k и j определяют вращения с матрицами

$$D_{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D'_{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

соответственно. Следовательно,

$$\tilde{\varphi}\{-1, -1\} = \tilde{\varphi}(D_{-1} * D'_{-1}) = kjk^{-1}j^{-1} = -1,$$

что и завершает доказательство. ■

Приведем теперь более тонкий пример, пользуясь техникой § 7. Пусть Λ — любое коммутативное кольцо, которое можно отобразить в комплексные числа, и пусть u, v — некоторые переменные. Построим кольцо $\Lambda[u, v, u^{-1}, v^{-1}]$ многочленов от u, v и обратных к ним элементов над Λ . (Такие многочлены от u и u^{-1} иногда называются « L -многочленами» в честь Лорана.)

Лемма 8.5. *Элемент $\{u, v\}$ порождает бесконечное циклическое прямое слагаемое группы $K_2 \Lambda[u, v, u^{-1}, v^{-1}]$.*

Вот набросок доказательства. Очевидно, достаточно рассмотреть случай $\Lambda = \mathbb{C}$. Пусть T — тор, состоящий из всевозможных пар (z_1, z_2) комплексных чисел с $|z_1| = |z_2| = 1$. Отобразим $\mathbb{C}[u, v, u^{-1}, v^{-1}]$ в кольцо C^T непрерывных функций на T , поставив в соответствие элементам u, v непрерывные функции $u(z_1, z_2) = z_1$ и $v(z_1, z_2) = z_2$. Дальнейшее доказательство основано на существовании гомоморфизма

$$\tilde{\varphi}: K_2 C^T \rightarrow \pi_1(SU^T)$$

из § 7. Группа $\pi_1(SU^T) \cong \pi_1(SU(2)^T)$ является бесконечной циклической, и прямое геометрическое рассуждение показывает, что $\tilde{\varphi}$ переводит элемент $\{u, v\}$ группы $K_2 C^T$ в образующую этой бесконечной циклической группы.

Я не буду приводить подробности этого доказательства, потому что этот метод довольно груб и более точные результаты можно получить с помощью методов Мацумото (ср. п. 11. 4).

Можно высказать предположение, что гомоморфизм

$$K_i C^X \rightarrow K^{-i} X$$

из алгебраической в топологическую K -теорию, описанный в § 7, совместим с умножениями в обеих теориях. Если это так, можно было бы дать очень прямое доказательство 8.5.

Определим теперь умножение $K_1 \Lambda \otimes K_1 \Lambda \rightarrow K_2 \Lambda$. Мы продолжаем считать, что Λ — коммутативное кольцо.

Если дан автоморфизм α свободного модуля Λ^m и автоморфизм β свободного модуля Λ^n , мы можем построить автоморфизм $\alpha \otimes \beta$ модуля $\Lambda^m \otimes \Lambda^n$. Чтобы написать его матрицу, упорядочим как-нибудь канонический базис $\Lambda^m \otimes \Lambda^n$. Тогда паре матриц $A \in GL(m, \Lambda)$ и $B \in GL(n, \Lambda)$ отвечает матрица $A \otimes B \in GL(mn, \Lambda)$. Пользуясь этим обозначением, мы построим бимультимпликативный символ

$$\{A, B\} \in K_2 \Lambda,$$

который служит обобщением символа $\{u, v\}$.

Пусть I — единичная матрица порядка $m \times m$, а I' — порядка $n \times n$. Заметим, что матрицы $A \otimes I'$ и $I \otimes B$ из группы $GL(mn, \Lambda)$ коммутируют. Поэтому матрицы

$$\text{diag}(A \otimes I', A^{-1} \otimes I', I \otimes I')$$

и

$$\text{diag}(I \otimes B, I \otimes I', I \otimes B^{-1})$$

из $E(3mn, \Lambda)$ тоже коммутируют. Определим $\{A, B\}$ как элемент

$$\text{diag}(A \otimes I', A^{-1} \otimes I', I \otimes I') * \text{diag}(I \otimes B, I \otimes I', I \otimes B^{-1})$$

группы $K_2 \Lambda$.

Заметим, что в частном случае $m = n = 1$ этот символ совпадает с $\{u, v\}$.

Лемма 8.6. *Операция $\{A, B\}$ корректно определена, бимультимпликативна и кососимметрична. Кроме того, если*

$$B = \text{diag}(B_1, B_\alpha),$$

где $B_i \in GL(n_i, \Lambda)$, то символ $\{A, B\}$ совпадает с $\{A, B_1\} \{A, B_2\}$.

Доказательство. Единственная неоднозначность в конструкции $\{A, B\}$ состояла в выборе упорядочения на базисе модуля $\Lambda^m \otimes \Lambda^n$. Если изменить выбор, получившаяся матрица будет сопряжена со старой посредством некоторого элемента P , перестановочной матрицы, в группе $E(3mn, \Lambda)$. В большей группе $E(3mn + 1, \Lambda)$

тот же результат достигается сопряжением с помощью матрицы $\text{diag}(P, \pm 1)$, которая принадлежит $E(3mn + 1, \Lambda)$. Пользуясь леммой 8.1, находим, что элемент $\{A, B\}$ однозначно определен.

Аналогично проверяется кососимметричность.

Чтобы доказать мультипликативность по обоим аргументам, нам понадобится следующая

Лемма 8.7. Если матрицы $X, Y \in E(r, \Lambda)$ коммутируют друг с другом и матрицы $X', Y' \in E(r', \Lambda)$ коммутируют друг с другом, то символ

$$\text{diag}(X, X') * \text{diag}(Y, Y') \in K_2 \Lambda$$

совпадает с произведением элементов $X * Y$ и $X' * Y'$.

Это устанавливается без труда, если учесть, что любая образующая x_{ij}^λ группы Стейнберга с $i, j \leq r$ коммутирует со всеми x_{kl}^μ , для которых $k, l > r$. ■

Предположим теперь, что матрица B совпадает с $B_1 B_2$. Тогда матрица $\text{diag}(I \otimes B, I \otimes I', I \otimes B^{-1})$ равна произведению трех матриц $\text{diag}(I \otimes B_1, I \otimes I', I \otimes B_1^{-1})$, $\text{diag}(I \otimes B_2, I \otimes I', I \otimes B_2^{-1})$ и $\text{diag}(I \otimes I', I \otimes I', I \otimes [B_2, B_1])$. Значит, согласно 8.1, символ $\{A, B\}$ равен произведению трех символов $\{A, B_1\}$, $\{A, B_2\}$ и

$$\text{diag}(A \otimes I', A^{-1} \otimes I', I \otimes I') * \text{diag}(I \otimes I', I \otimes I', I [B_2, B_1]).$$

Но третий множитель равен 1. Действительно, пользуясь 8.7 и переходя к большей группе $E(4mn, \Lambda)$, мы можем представить его в виде произведения матриц

$$\text{daig}(A \otimes I, A^{-1} \otimes I) * \text{diag}(I \otimes I', I \otimes I') = 1$$

и

$$\text{diag}(I \otimes I', I \otimes I') * \text{diag}(I \otimes [B_2, B_1], I \otimes I') = 1.$$

Это доказывает бимultiпликативность.

Формула для $\{A, \text{diag}(B_1, B_2)\}$ легко проверяется с помощью 8.7, чем и завершается доказательство леммы 8.6. ■

ТЕОРЕМА 8.8. Символ $\{A, B\}$ определяет кососимметричное бимультимпликативное спаривание из $K_1 \Lambda \times K_1 \Lambda$ в $K_2 \Lambda$.

Доказательство почти очевидно. Правило

$$\{A, \text{diag}(B, 1)\} = \{A, B\} \{A, 1\} = \{A, B\}$$

вместе с соответствующим тождеством для A показывает, что символ $\{A, B\}$ определяет бимультимпликативную функцию

$$GL(\Lambda) \times GL(\Lambda) \rightarrow K_2 \Lambda.$$

Так как ее значения лежат в абелевой группе, мы можем перейти к факторам по коммутанту слева.

Если перейти к аддитивной записи $K_1 \Lambda$ и $K_2 \Lambda$, это спаривание можно обозначить так: $K_1 \Lambda \otimes K_1 \Lambda \rightarrow K_2 \Lambda$.

Как в § 4, оно определяет умножение

$$K_1 \Lambda \otimes K_1 \mathfrak{a} \rightarrow K_2 \mathfrak{a}$$

для любого двустороннего идеала $\mathfrak{a} \subset \Lambda$.

Заметим, что отображение $K_1 \Lambda \otimes K_1 \Lambda \rightarrow K_2 \Lambda$ не всегда сюръективно:

Пример. Пусть X — сфера S^2 . Рассмотрим кольцо непрерывных вещественных функций R^X . Из результатов § 7 следует, что $K_1 R^X$ совпадает с группой единиц $(R^\circ)^X$, распадающейся в прямую сумму циклической группы второго порядка и делимой группы. С другой стороны, у $K_2 R^X$ есть бесконечное циклическое прямое слагаемое, согласно 7.7. Ясно поэтому, что гомоморфизм

$$K_1 R^X \otimes K_1 R^X \rightarrow K_2 R^X$$

не может быть сюръективным.

В заключение этого параграфа отметим, что различные введенные нами умножения согласованы друг с другом.

ЛЕММА 8.9. Умножения ассоциативны:

$$K_i \Lambda \otimes K_j \Lambda \otimes K_k \Lambda \rightarrow K_{i+j+k} \Lambda$$

при $i + j + k \leq 2$. В частности, умножение $K_1 \Lambda \otimes K_1 \Lambda \rightarrow$

$\rightarrow K_2 \Lambda$ билинейно относительно действия $K_0 \Lambda$ на $K_1 \Lambda$ и $K_2 \Lambda$.

Мы оставляем доказательство читателю. Ключевой шаг состоит в проверке того, что гомоморфизм

$$h_P: GL(n, \Lambda) \rightarrow GL(\Lambda),$$

используемый для определения действия $K_0 \Lambda$ на $K_1 \Lambda$ и $K_2 \Lambda$, удовлетворяет тождеству

$$(h_P A) * (h_P B) = h_{P*} (A * B),$$

если матрицы $A, B \in E(n, \Lambda)$ коммутируют (ср. конец § 5).

§ 9. ВЫЧИСЛЕНИЯ В ГРУППЕ СТЕЙНБЕРГА

Все результаты этого параграфа принадлежат Стейнбергу. Мы будем работать в группе $\text{St}(n, \Lambda)$, $n \geq 3$.

Для любой единицы u кольца Λ рассмотрим элементы

$$w_{ij}(u) = x_{ij}^u x_{ji}^{-u^{-1}} x_{ij}^u, \quad h_{ij}(u) = w_{ij}(u) w_{ij}(-1).$$

(Обратите внимание на тождества $w_{ij}(u) w_{ij}(-u) = 1$ и $h_{ij}(1) = 1$.) Пусть $W \subset \text{St}(n, \Lambda)$ — подгруппа, порожденная всеми $w_{ij}(u)$.

Матрица из $GL(n, \Lambda)$ называется *мономиальной*, если она равна произведению PD перестановочной и диагональной матриц.

Лемма 9.1. *Если Λ коммутативно, то образ $\varphi(W) \subset GL(n, \Lambda)$ совпадает с множеством всех мономиальных матриц с определителем единица.*

Доказательство. Проверяется, что $\varphi w_{ij}(u)$ — мономиальная матрица с элементом u на месте (i, j) и элементом $-u^{-1}$ на месте (j, i) , а $\varphi h_{ij}(u)$ — диагональная матрица с элементом u на месте (i, i) и элементом u^{-1} на месте (j, j) . Очевидно, такие матрицы порождают описанную группу. ■

Лемма 9.2. *Сопряжение с помощью элемента из W переводит каждую образующую x_{ij}^λ группы $\text{St}(n, \Lambda)$ в некоторую образующую x_{kl}^μ группы $\text{St}(n, \Lambda)$.*

Прежде чем доказывать эту лемму, выведем два следствия.

Следствие 9.3. *Ядро C_n гомоморфизма*

$$\varphi|W : W \rightarrow GL(n, \Lambda)$$

лежит в центре группы $\text{St}(n, \Lambda)$.

Действительно, если $\varphi(w) = I$ с $w \in W$, то, применяя φ к формуле

$$w x_{ij}^\lambda w^{-1} = x_{kl}^\mu,$$

мы получим соотношение

$$I \cdot e_{ij}^\lambda \cdot I^{-1} = e_{kl}^\mu$$

в группе $GL(n, \Lambda)$, откуда, очевидно, следует, что $x_{ij}^\lambda = x_{kl}^\mu$. ■

Другое следствие является просто уточненной формулировкой леммы 9.2. Для данного $w \in W$ представим $\varphi(w)$ как произведение PD , где P — перестановочная матрица, отвечающая некоторой перестановке π целых чисел между 1 и n , а D — диагональная матрица $\text{diag}(v_1, v_2, \dots, v_n)$.

Следствие 9.4. Элемент $w x_{ij}^\lambda w^{-1}$ равен $x_{\pi(i)\pi(j)}^{v_i \lambda v_j^{-1}}$. Аналогично сопряжение посредством w переводит $w_{ij}(u)$ в $w_{\pi(i)\pi(j)}(v_i u v_j^{-1})$, а $h_{ij}(u)$ в $h_{\pi(i)\pi(j)}(v_i u v_j^{-1}) h_{\pi(i)\pi(j)}(v_i v_j^{-1})^{-1}$.

Здесь $\pi(ij)$ — сокращенная запись пары $\pi(i), \pi(j)$.

Доказательство. Чтобы установить первую формулу, заметим, что

$$P D e_{ij}^\lambda D^{-1} P^{-1} = e_{\pi(i)\pi(j)}^{v_i \lambda v_j^{-1}}$$

и затем применим 9.4. Остальные две формулы проверяются немедленно. ■

Доказательство леммы 9.2. Очевидно, достаточно вычислить $w x_{ij}^\lambda w^{-1}$ в случае, когда w — образующая $w_{kl}(u)$ группы W . Доказательство требует перебора семи случаев в соответствии с тем, какое из чисел i, j с каким из чисел k, l совпадает. Например, если $i = k$, но $j \neq l$, то, полагая $uv = 1$, получаем

$$\begin{aligned} w_{il}(u) x_{ij}^\lambda w_{il}(-u) &= x_{il}^u x_{li}^{-v} (x_{il}^u x_{ij}^\lambda x_{il}^{-u}) x_{li}^v x_{il}^{-u} = \\ &= x_{il}^u (x_{li}^{-v} x_{ij}^\lambda x_{li}^v) x_{il}^{-u} = x_{il}^u x_{lj}^{-v\lambda} (x_{ij}^\lambda x_{il}^{-u}) = \\ &= (x_{il}^u x_{lj}^{-v\lambda} x_{il}^{-u}) x_{ij}^\lambda = (x_{ij}^{-\lambda} x_{lj}^{-v\lambda}) x_{il}^\lambda = \\ &= x_{lj}^{-v\lambda}. \end{aligned}$$

Подобные же вычисления проходят в случае когда

по крайней мере три из четырех индексов i, j, k, l разные. Наконец, если $i = k$ и $j = l$, то

$$\begin{aligned} \omega_{ij}(u) x_{ij}^\lambda \omega_{ij}(-u) &= \omega_{ij}(u) [x_{iq}^\lambda, x_{qj}^1] \omega_{ij}(-u) = \\ &= [x_{jq}^{v\lambda}, x_{qi}^v] = x_{ji}^{v\lambda v} \end{aligned}$$

и аналогично

$$\omega_{ji}(u) x_{ij}^\lambda \omega_{ji}(-u) = x_{ji}^{-u\lambda u}.$$

Это завершает доказательство. ■

Вот некоторые примеры к 9.4. Положим сначала $\omega = \omega_{ij}(u)$, так что соответствующая перестановка π меняет местами i и j и, кроме того, $v_i = -u^{-1}$, $v_j = u$. Сопряжение ω с помощью самого себя дает

$$\omega \omega_{ij}(u) \omega^{-1} = \omega_{ji}(-u^{-1} u u^{-1})$$

или, иными словами, следующий результат:

ЛЕММА 9.5. $\omega_{ij}(u) = \omega_{ij}(-u^{-1})$.

Для следующего примера положим $\omega = h_{12}(u)$, так что π — тождественная перестановка, и $v_1 = u$, $v_2 = u^{-1}$. Тогда элемент

$$\omega h_{13}(v) \omega^{-1} = \omega (\omega_{13}(v) \omega_{13}(-1)) \omega^{-1}$$

совпадает с

$$\omega_{13}(uv) \omega_{13}(-u) = h_{13}(uv) h_{13}(u)^{-1}.$$

Умножая это равенство справа на $h_{13}(v)^{-1}$, получаем такое утверждение:

ЛЕММА 9.6. Коммутатор $[h_{12}(u), h_{13}(v)]$ из п. 8.2 совпадает с

$$h_{13}(uv) h_{13}(u)^{-1} h_{13}(v)^{-1}.$$

В коммутативном случае это выражение описывает, в какой мере отображение $u \mapsto h_{13}(u)$ отклоняется от гомоморфизма.

Если Λ коммутативно, то эти выражения, очевидно, лежат в центральной подгруппе $C_n = W \cap \text{Ker } \varphi$. Как в § 8, мы можем доказать следующий факт:

ЛЕММА 9.7. Если кольцо Λ коммутативно, то символ

$$\begin{aligned}\{u, v\} &= [h_{ij}(u), h_{ik}(v)] = \\ &= h_{ik}(uv) h_{ik}(u)^{-1} h_{ik}(v)^{-1}\end{aligned}$$

кососимметричен, бимультпликативен и принимает значения в коммутативной группе C_n .

Приписывание символу $\{u, v\}$ нового, более точного значения не может привести к недоразумениям, потому что при естественном гомоморфизме

$$C_n \rightarrow \varinjlim C_n \subset K_2\Lambda$$

этот новый символ, очевидно, переходит в старый.

Ясно, что символ $\{u, v\}$ не зависит от выбора индексов $i \neq j \neq k \neq i$.

Следующая фундаментальная лемма связывает символ $\{u, v\}$ с аддитивной структурой кольца Λ .

ЛЕММА 9.8. Если u и $1-u$ — единицы, то $\{u, 1-u\} = 1$. Далее $\{u, -u\} = 1$ для любой единицы u .

Доказательство. Беря в качестве v либо $1-u$, либо $-u$, мы должны проверить тождество

$$(1) \quad h_{12}(u) h_{12}(v) = h_{12}(uv).$$

Подставив в (1) определение $h_{12}(x) = w_{12}(x) w_{12}(-1)$, мы убеждаемся, что достаточно проверить равенство

$$(2) \quad w_{12}(u) w_{12}(-1) w_{12}(v) = w_{12}(uv).$$

Если $v = 1-u$, это можно проверить, подставив в (2) тождество

$$w_{12}(-1) = w_{21}(1) = x_{21}^1 x_{12}^{-1} x_{21}^1$$

(ср. 9.5). Далее, подставляя в левую часть (2) формулы

$$w_{12}(u) x_{21}^1 = x_{12}^{-u^2} w_{12}(u)$$

и

$$x_{21}^1 w_{12}(v) = w_{12}(v) x_{12}^{-v^2}$$

из 9.4, получаем

$$(2') \quad x_{12}^{-u^2} w_{12}(u) x_{12}^{-1} w_{12}(v) x_{12}^{-v^2}.$$

Подставив сюда определения $w_{12}(u)$ и $w_{12}(v)$ и пользуясь тождествами $-u^2 + u = uv$, $u - 1 + v = 0$, $v - v^2 = uv$ и, наконец, $-u^{-1} - v^{-1} = -(uv)^{-1}$, получаем из (2') соотношение

$$x_{12}^{uv} x_{21}^{-u^{-1}} x_{12}^0 x_{21}^{-v^{-1}} x_{12}^{uv} = x_{12}^{uv} x_{21}^{-(uv)^{-1}} x_{12}^{uv} = w_{12}(uv),$$

что и требовалось.

Доказательство тождества

$$w_{12}(u) w_{12}(-1) w_{12}(-u) = w_{12}(-u^2)$$

проще. Переписав его левую часть в виде $w_{12}(u) w_{12}(-1) w_{12}(u)^{-1}$, получаем, что она равна $w_{21}(u^{-2})$ в силу 9.4 и, значит, $w_{12}(-u^2)$ в силу 9.5. Это завершает доказательство леммы 9.8. (Я обязан этим вариантом доказательства Стейнбергу.) ■

Следствие 9.9. Если Λ — конечное поле или кольцо целых чисел по модулю степени нечетного простого числа (ср. конец § 10), то $\{u, v\} = 1$ для всех u, v .

Доказательство. Допустим сначала, что Λ — поле из q элементов, q нечетно. Тогда группа единиц Λ^* — циклическая группа порядка $q - 1$. Одна половина ее элементов — квадраты, другая половина — неквадраты. Заметим, что можно найти неквадрат u_0 , такой, что $1 - u_0$ — тоже неквадрат. Действительно, иначе отображение $u \mapsto 1 - u$ из $\Lambda^* \setminus \{1\}$ в себя перевело бы каждый из $(q - 1)/2$ неквадратов в квадрат. Тогда в Λ^* было бы $(q - 1)/2$ квадратов, кроме 1, что неверно.

Пусть v — некоторая образующая группы Λ^* . Тогда $u_0 = v^i$, $1 - u_0 = v^j$, где i, j нечетны, откуда следует, что $\{v, v\}^{ij} = 1$. Так как из кососимметричности следует, что $\{v, v\}^2 = 1$, элемент $\{v, v\}$ тривиален.

Если же $\Lambda = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, где p нечетно, то применимо аналогичное рассуждение, ибо группа Λ^* циклическа, а число является квадратичным вычетом по модулю p^n в том и только том случае, когда это так по модулю p . Наконец, если Λ — поле порядка $q = 2^k$, то уравнения $\{v, v\}^{q-1} = 1$ и $\{v, v\}^2 = 1$ вместе показывают, что $\{v, v\} = 1$. Это доказывает следствие. ■

Покажем теперь, что группа C_n порождена символами $\{u, v\}$. Первым шагом будет доказательство следующей леммы.

ЛЕММА 9.10. *Все символы $h_{jk}(u)$ можно выразить через $h_{1k}(u)$ (с $j=1$). В самом деле, эти символы удовлетворяют тождествам*

$$h_{jk}(u) h_{kj}(u) = 1, \quad h_{ij}(u)^{-1} h_{jk}(u)^{-1} h_{ki}(u)^{-1} = 1.$$

Доказательство. Упрощая первые три множителя коммутатора $h_{ik}(u) \omega_{jk}(1) h_{ik}(u)^{-1} \omega_{jk}(-1)$ с помощью 9.4, мы можем привести его к виду $\omega_{jk}(u) \omega_{jk}(-1) = h_{jk}(u)$. С другой стороны, упрощая последние три его сомножителя с помощью 9.4, мы получаем $h_{ik}(u) h_{ij}(u)^{-1}$. Тем самым

$$(*) \quad h_{jk}(u) = h_{ik}(u) h_{ij}(u)^{-1}.$$

Полагая $i=1$, находим первое из утверждений леммы 9.10 (по крайней мере для $j, k > 1$). Умножив тождество $(*)$ на такое же тождество с переставленными j, k , мы получим второе утверждение 9.10. Наконец, подставив $h_{ki}(u)^{-1}$ вместо $h_{ik}(u)$, находим третье. ■

Замечание. По-видимому, с символами $h_{ij}(u)^{-1}$ было бы немного легче работать, чем с $h_{ij}(u)$.

Пусть Λ — любое коммутативное кольцо.

ТЕОРЕМА 9.11. *Центральная подгруппа*

$$C_n = W \cap \text{Ker } \varphi \subset \text{St}(n, \Lambda)$$

порождена символами $\{u, v\}$.

Доказательство. Пусть $H \subset W$ — подгруппа, порожденная всеми элементами $h_{ij}(u)$. Из 9.4 следует, что она нормальна. Покажем сначала, что $C_n \subset H$.

По модулю H имеют место соотношения

$$\omega_{ij}(u) \equiv \omega_{ij}(1).$$

Обозначив этот общий класс через ω_{ij} , заметим, что $\omega_{ij} \equiv \omega_{ji} \pmod{H}$. Пусть теперь дан некоторый элемент

$$c = \omega_{i_1 j_1}(u_1) \dots \omega_{i_k j_k}(u_k)$$

группы C_n . Воспользуемся соотношениями

$$\omega_{ij}\omega_{1l} \equiv \omega_{\pi(1l)}\omega_{ij} \pmod{H}$$

при $i, j > 1$, чтобы перебросить все вхождения ω_{1l} налево. (Здесь π переставляет i с j .) Затем применим соотношения

$$\omega_{1l}\omega_{1l} \equiv 1$$

и

$$\omega_{1j}\omega_{1l} \equiv \omega_{1l}\omega_{lj} \quad \text{при } j \neq l$$

с тем, чтобы исключить ω_{1l} , по одному или по два за один прием. В конце концов слева может остаться разве лишь один ω_{1l} , но и это невозможно, потому что тогда $\varphi(c)$ не мог бы отвечать единичной перестановке. Аналогично можно исключить все вхождения ω_{2l} и так далее, получив в конце концов $c \equiv 1 \pmod{H}$.

Там самым c можно записать в виде произведения символов $h_{ij}(u)$. Пользуясь 9.10, получаем, что c можно записать в виде произведения символов $h_{1l}(u)$ и обратных к ним.

Обозначив теперь через C^* подгруппу C_n , порожденную символами $\{u, v\}$, заметим, что

$$h_{1l}(uv) \equiv h_{1l}(u)h_{1l}(v) \pmod{C^*}$$

и

$$h_{1j}(u)h_{1l}(v) \equiv h_{1l}(v)h_{1j}(u) \pmod{C^*}.$$

Отсюда легко следует, что элемент c можно представить в виде произведения

$$c \equiv h_{12}(u_2)h_{13}(u_3) \dots h_{1n}(u_n) \pmod{C^*}.$$

Стало быть, $\varphi(c)$ является диагональной матрицей $\text{diag}(u_2 \dots u_n, u_2^{-1}, \dots, u_n^{-1})$. Но по предположению $\varphi(c) = I$, значит, $u_2 = u_3 = \dots = u_n = 1$, так что $c \equiv 1 \pmod{C^*}$. Этим завершается доказательство 9.11. ■

ТЕОРЕМА 9.12. Если Λ — поле или тело, то ядро гомоморфизма

$$\varphi: \text{St}(n, \Lambda) \rightarrow GL(n, \Lambda)$$

содержится в W и, значит, совпадает с C_n . Поэтому группа Стейнберга $\text{St}(n, \Lambda)$ является центральным расширением $E(n, \Lambda)$ для всех $n \geq 3$.

В сочетании с 9.11, 9.12 и 9.9 переходом к прямому пределу при $n \rightarrow \infty$ находим

Следствие 9.13. Если Λ — поле, то группа $K_2\Lambda$ порождена символами $\{u, v\}$. В частности, если Λ конечное поле, то $K_2\Lambda = 1$.

Замечание. М. Штейн недавно обобщил этот результат, показав, что группа $K_2\Lambda$ порождена символами $\{u, v\}$ для любого полулокального кольца Λ , аддитивно порожденного своим множеством единиц $\Lambda^\times$.

Доказательство теоремы 9.12 основано на двух леммах.

Пусть T — подгруппа $\text{St}(n, \Lambda)$, порожденная всеми x_{ij}^λ , для которых $i < j$.

Лемма 9.14. Любой элемент группы T можно записать в виде произведения

$$\prod_{i < j} x_{ij}^{\lambda(ij)},$$

в котором множители расположены в лексикографическом порядке. Следовательно, φ изоморфно отображает T на нильпотентную группу, состоящую из всех верхних треугольных матриц с единицами 1 на диагонали.

Доказательство не представляет труда.

Лемма 9.15. Если Λ — поле или тело, то любой элемент из $\text{St}(n, \Lambda)$ содержится в произведении TWT .

Доказательство. Очевидно, $\text{St}(n, \Lambda)$ порождена теми x_{ij}^λ , у которых $j = i = \pm 1$. Так как

$$\omega_{ij}(1) x_{ij}^\lambda \omega_{ij}(-1) = x_{ji}^{-\lambda},$$

группа $\text{St}(n, \Lambda)$ порождена T и $\omega_{i,i+1}(1)$. Поэтому для доказательства 9.15 достаточно проверить, что множество TWT инвариантно относительно правого умножения на $\omega_{i,i+1}(1)$.

Чтобы упростить обозначения, положим $j = i + 1$. Выбрав любой элемент $t_1 \omega t_2$ из TWT , запишем t_2

в виде произведения $x_{ij}^\lambda t'$, где t' является произведением элементов x_{kl}^μ с $k < l$ и $(k, l) \neq (i, j)$. Тогда

$$t_1 \omega t_2 \omega_{ij}(1) = t_1 (\omega x_{ij}^\lambda \omega_{ij}(1)) t'',$$

где элемент

$$t'' = \omega_{ij}(-1) t' \omega_{ij}(1),$$

очевидно, принадлежит T . Таким образом, достаточно проверить, что

$$\omega x_{ij}^\lambda \omega_{ij}(1) \in TWT.$$

Пусть π — перестановка, соответствующая ω .

С л у ч а й 1. Если

$$\pi(i) < \pi(j) = \pi(i+1),$$

то

$$\omega x_{ij}^\lambda \omega_{ij}(1) = x_{\pi(ij)}^{\lambda'} \omega \omega_{ij}(1) \in TW.$$

С л у ч а й 2. Если $\pi(i) > \pi(j)$ и λ — единица, то

$$x_{ij}^\lambda = \omega_{ij}(\lambda) x_{ij}^{-\lambda} x_{ji}^{\lambda^{-1}},$$

откуда

$$\begin{aligned} \omega x_{ij}^\lambda \omega_{ij}(1) &= (\omega \omega_{ij}(\lambda) x_{ij}^{-\lambda}) (x_{ji}^{\lambda^{-1}} \omega_{ij}(1)) = \\ &= (x_{\pi(ji)}^{\lambda'} \omega \omega_{ij}(\lambda)) (\omega_{ij}(1) x_{ij}^{-\lambda^{-1}}) \in TWT. \end{aligned}$$

С л у ч а й 3. Если λ — не единица, то $\lambda = 0$, и утверждение очевидно.

Это доказывает лемму 9.15. ■

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 9.12. Если $\varphi(t_1 \omega t_2) = I$, то мономиальная матрица $\varphi(\omega)$ равна верхней треугольной матрице $\varphi(t_1)^{-1} \varphi(t_2)^{-1}$. Следовательно,

$$\varphi(\omega) = \varphi(t_1^{-1} t_2^{-1}) = I,$$

откуда вытекает, что $\omega \in C_n$ и $t_2 = t_1^{-1}$, значит,

$$t_1 \omega t_2 = t_1 \omega t_1^{-1} = \omega \in C_n,$$

что и требовалось. Это завершает доказательство. ■

Обсуждение группы K_2 для поля мы продолжим в § 11.

§ 10. ВЫЧИСЛЕНИЕ K_2Z

В этом параграфе будет доказана следующая

ТЕОРЕМА 10.1. При $n \geq 3$ группа $St(n, Z)$ является центральным расширением вида

$$1 \rightarrow C_n \rightarrow St(n, Z) \rightarrow E(n, Z) \rightarrow 1,$$

где C_n — циклическая группа второго порядка, порожденная символом

$$\{-1, -1\} = (x_{12}^1 x_{21}^{-1} x_{12}^1)^4$$

(ср. пп. 9.3, 9.7 и 9.11). Отсюда непосредственно вытекает

Следствие 10.2. Группа K_2Z является циклической группой второго порядка, порожденной символом $\{-1, -1\}$.

Действительно, K_2Z является прямым пределом групп C_n .

Следующее утверждение эквивалентно 10.1. Пусть $e_{ij} = \varphi(x_{ij}^1)$ — элементарная матрица, у которой на (i, j) -м месте стоит $+1$, $i \neq j$.

Следствие 10.3. При $n \geq 3$ группа $SL(n, Z) = E(n, Z)$ порождена $n(n-1)$ образующими e_{ij} , которые связаны только соотношениями Стейнберга

$$[e_{ij}, e_{kl}] = 1, \text{ если } j \neq k, i \neq l,$$

$$[e_{ij}, e_{jk}] = e_{ik}, \text{ если } i, j, k \text{ различны,}$$

и еще одним соотношением $(e_{12} e_{21}^{-1} e_{12})^4 = 1$.

Доказательство 10.3. Введя e_{ij}^λ как λ -ю степень e_{ij} , мы находим, что все соотношения Стейнберга непосредственно следуют из выписанных. Вместе с 10.1 это завершает доказательство. ■

Доказательство теоремы 10.1 основано на классических работах Нильсона и Магнуса. В самом деле, 10.1 можно вывести из статьи Магнуса (Magnus W., Über n -dimensionale Gittertransformationen, *Acta Math.*, 64 (1935), 353—367).

Мы приведем упрощенное доказательство, основанное на недавней работе Сильвестера (Silvester J. R., A presentation of $GL_n(Z)$ and $GL_n(k[X])$, в печати). Следует отметить, что Сильвестер, а также Деннис с помощью этого же метода установили изоморфизм $K_2F[x] \cong K_2F$, где $F[x]$ — кольцо многочленов одной переменной над полем F . Деннис распространил это вычисление на случай тела коэффициентов.

Доказательства Сильвестера индуктивные, так что нам придется начать со случаев $n = 1, 2$. Для $n = 1$ мы просто положим $St(1, \Lambda)$ равной тривиальной группе. Для $n = 2$ правильное определение, согласно Стейнбергу, таково (ср. конец доказательства леммы 9.2):

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.4. Для любого кольца Λ (ассоциативного с единицей) обозначим через $St(2, \Lambda)$ группу с образующими x_{12}^λ и x_{21}^λ (где λ пробегает элементы кольца), которые подчинены следующим соотношениям:

$$x_{ij}^\lambda x_{ij}^\mu = x_{ij}^{\lambda+\mu}$$

и

$$w_{ij}(u) x_{ji}^\lambda w_{ij}(-u) = x_{ij}^{-u\lambda u}$$

для $u \in \Lambda^*$, где $w_{ij}(u)$ определяется как $x_{ij}^u x_{ji}^{-u^{-1}} x_{ij}^u$.

Аналог теоремы 10.1 имеет следующую форму. Будем писать x_{ij} вместо образующей Стейнберга x_{ij}^1 .

ТЕОРЕМА 10.5. Группа $St(2, Z)$ является центральным расширением

$$1 \rightarrow C_2 \rightarrow St(2, Z) \rightarrow E(2, Z) \rightarrow 1,$$

где C_2 — свободная циклическая группа, порожденная элементом $(x_{12}x_{21}^{-1}x_{12})^4$. Следовательно, группа $SL(2, Z) = E(2, Z)$ определена образующими e_{12} , e_{21} и соотношениями

$$e_{12}e_{21}^{-1}e_{12} = e_{21}^{-1}e_{12}e_{21}^{-1},$$

$$(e_{12}e_{21}^{-1}e_{12})^4 = 1.$$

Второе утверждение (конечно, классическое) следует из первого, потому что проверяется, что образующие x_{12} и x_{21} группы $St(2, Z)$ подчинены только соотношению

$$x_{12}x_{21}^{-1}x_{12} = x_{21}^{-1}x_{12}x_{21}^{-1}.$$

Разные замечания. Группа с двумя образующими $\alpha = x_{12}$ и $\beta = x_{21}^{-1}$ и одним соотношением $\alpha\beta\alpha = \beta\alpha\beta$ известна в теории узлов как фундаментальная группа дополнения к трилистнику $K \subset S^3$. (Эту же группу можно задать образующими ζ, ω с соотношениями $\zeta^3 = \omega^2$, здесь $\zeta = \alpha\beta$ и $\omega = \alpha\beta\alpha$.)

Этот любопытный изоморфизм $\text{St}(2, Z) \cong \pi_1(S^3 \setminus K)$ имеет геометрическое объяснение. Рассмотрим $E(2, Z) = SL(2, Z)$ как дискретную подгруппу связной группы Ли $E(2, R) = SL(2, R)$. Универсальное накрытие $\tilde{E}(2, R)$ является центральным расширением

$$1 \rightarrow \Pi \rightarrow \tilde{E}(2, R) \rightarrow E(2, R) \rightarrow 1,$$

где Π — фундаментальная группа

$$\pi_1 E(2, R) \cong Z.$$

Обозначим через $\tilde{E}(2, Z)$ прообраз подгруппы $E(2, Z) \subset E(2, R)$ в $\tilde{E}(2, R)$. Очевидно, последовательность

$$1 \rightarrow \Pi \rightarrow \tilde{E}(2, Z) \rightarrow E(2, Z) \rightarrow 1$$

точна, и Π — центральная подгруппа в $\tilde{E}(2, Z)$. Нетрудно показать, что эту последовательность можно отождествить с последовательностью из 10.5, так что $\tilde{E}(2, Z) \cong \text{St}(2, Z)$.

Группу $\tilde{E}(2, Z)$ можно также отождествить с фундаментальной группой однородного пространства

$$M^3 = E(2, R)/E(2, Z).$$

Действительно, композиция двух накрытий

$$\tilde{E}(2, R) \rightarrow E(2, R) \rightarrow M^3$$

является универсальным накрытием M^3 , а группа этого накрытия совпадает с $\tilde{E}(2, Z)$, действующей на $\tilde{E}(2, R)$ левыми сдвигами.

Утверждение. Однородное пространство $M^3 = SL(2, R)/SL(2, Z)$ диффеоморфно дополнению к узлу трилистника в сфере S^3 .

Следующее остроумное доказательство принадлежит Квиллену. Заметим прежде всего, что M^3 можно отождествить с множеством решеток (дискретных подгрупп ранга 2) в R^2 , для которых площадь фактора R^2/L равна единице. Действительно, группа $SL(2, R)$ транзитивна на множестве таких решеток, а стационарная подгруппа стандартной решетки Z^2 совпадает с $SL(2, Z)$.

Заменяем теперь R^2 плоскостью комплексных чисел C . Сопоставим с любой решеткой $L \subset C$ функцию Вейерштрасса $\wp(z)$ — дважды периодическую мероморфную функцию с решеткой периодов L и с полюсами вида

$$\wp(\lambda + z) = z^{-2} + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \dots$$

во всех точках решетки λ и только в них. Эта функция $\wp(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению вида

$$(d\wp/dz)^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3,$$

где комплексные константы g_2 и g_3 можно определить посредством формул

$$g_2 = 60 \sum \lambda^{-4}, \quad g_3 = 140 \sum \lambda^{-6},$$

в которых суммирование производится по всем точкам решетки, кроме нуля. Эти константы g_2 и g_3 однозначно определяют функцию $\wp$ и решетку L . Пара (g_2, g_3) получается таким способом в том и только в том случае, когда $27(g_3)^2 - (g_2)^3 \neq 0$. (Это выражение является дискриминантом многочлена $4\omega^3 - g_2\omega - g_3$. Его обращение в нуль равносильно геометрическому требованию, чтобы отображение $C/L \rightarrow C \cup \infty$ степени 2, определенное функцией $\wp$, имело ровно четыре разных точки ветвления.) Значит, пространство $GL(2, R)/GL(2, Z)$, состоящее из всех решеток в C , диффеоморфно дополнению к множеству

$$27(g_3)^2 - (g_2)^3 = 0$$

в C^2 . Обозначим через K узел трилистника, который получается при пересечении этого множества с единичной сферой S^3 в C^2 . Искомый диффеоморфизм $M^3 \rightarrow S^3 \setminus K$ теперь строится так. Для каждой решетки L ,

представляющей элемент M^3 , можно построить единственную подобную ей решетку tL с $t > 0$, инварианты которой $(t^{-4}g_2, t^{-6}g_3)$ лежат на единичной сфере. Соответствие $L \mapsto (t^{-4}g_2, t^{-6}g_3)$ и определяет требуемый диффеоморфизм. ■

Приступим теперь к доказательству теорем 10.1 и 10.5. Пусть группа $\text{St}(n, Z)$ действует справа на модуле Z^n целочисленных n -векторов посредством естественного гомоморфизма $\text{St}(n, Z) \rightarrow E(n, Z)$. Например, при $n=2$ это действие задается формулами

$$(a, b) x_{12} = (a, a + b), \quad (a, b) x_{21} = (a + b, b).$$

Введем в Z^n «норму»

$$\|(a_1, \dots, a_n)\| = |a_1| + \dots + |a_n|.$$

Пусть $\pm \beta$ — один из стандартных базисных векторов в Z^n , так что $\|\beta\| = 1$.

Как в § 9, обозначим через $W = W_n$ подгруппу $\text{St}(n, Z)$, порожденную элементами

$$w_{ij} = w_{ij}(1) = x_{ij}x_{ji}^{-1}x_{ij}.$$

Заметим, что действие W на Z^n сохраняет норму.

Лемма 10.6 (Сильвестер). *Любой элемент из $\text{St}(n, Z)$ при $n \geq 2$ можно записать в виде произведения*

$$g_1 g_2 \dots g_r w$$

таким образом, что $w \in W$, каждый из элементов g_α есть один из образующих Стейнберга $x_{ij}^{\pm 1}$ и выполнены условия

$$\|\beta g_1\| \leq \|\beta g_1 g_2\| \leq \dots \leq \|\beta g_1 g_2 \dots g_r\|.$$

Доказательство. Любой последовательности $g_1, g_2, \dots, g_r$ образующих Стейнберга поставим в соответствие последовательность $1 = \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ положительных целых чисел, определенную формулами

$$\sigma_\alpha = \|\beta g_1 g_2 \dots g_\alpha\|.$$

Грубой мерой отклонения этой последовательности от монотонности может служить пара положительных целых чисел (λ, μ) , которая определяется так. Если последо-

вательность монотонная ($1 \leq \sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \dots \leq \sigma_r$), мы полагаем $\lambda = \mu = 1$. В противном случае существует индекс α , для которого $\sigma_\alpha > \sigma_{\alpha+1}$. Положим

$$\lambda = \max \{ \sigma_\alpha \text{ со свойством } \sigma_\alpha > \sigma_{\alpha+1} \}.$$

Так как этот максимум может достигаться при нескольких разных значениях α , мы положим

$$\mu = \max \{ \alpha \text{ со свойством } \sigma_\alpha = \lambda > \sigma_{\alpha+1} \}.$$

Пары (λ, μ) мы упорядочим лексикографически, так что $(\lambda, \mu) > (\lambda', \mu')$ в том и только том случае, когда либо $\lambda > \lambda'$, либо $\lambda = \lambda'$ и $\mu > \mu'$.

Доказательство леммы 10.6 будет состоять в проверке того, что каждое слово $g_1 \dots g_r \omega$ с $(\lambda, \mu) > (1, 1)$ можно изменить, пользуясь соотношениями Стейнберга, так, что пара (λ, μ) уменьшится. Повторив эту процедуру конечное число раз, мы придем к слову, для которого $(\lambda, \mu) = (1, 1)$.

Итак, предположим, что $(\lambda, \mu) > (1, 1)$. В этом случае

$$\lambda = \sigma_\mu > \sigma_{\mu+1}.$$

Заметим, что $\mu \geq 1$ (при $\mu = 0$ мы имели бы $1 = \sigma_0 > \sigma_1$, а это невозможно) и $\sigma_{\mu-1} \leq \sigma_\mu$.

Чтобы упростить обозначения и для определенности предположим, что $g_\mu = x_{12}$. (Общий случай легко сводится к этому так. Если $g_\mu = x_{ij}$, перенумеруем координаты так, чтобы i, j превратились в 1, 2 соответственно. Если же $g_\mu = x_{ij}^{-1}$, применим к каждому g_α сопряжение посредством w_{ij} , затем заменим β на βw_{ij}^{-1} и w на $w_{ij} w$. Мы получим задачу, эквивалентную прежней, в которой g_μ превратился в x_{ji} . После этого применим уже описанную перенумерацию координат.)

Итак, пусть $g_\mu = x_{12}$. Положим

$$\beta g_1 g_2 \dots g_\mu = (a, b, c, \dots) \in Z^n,$$

тогда

$$\beta g_1 g_2 \dots g_{\mu-1} = (a, b - a, c, \dots).$$

Следовательно, неравенство $\sigma_{\mu-1} \leq \sigma_\mu$ примет вид

$$|b - a| \leq |b|.$$

Очевидно, это утверждение равносильно следующему:

$$(1) \quad |a| \leq 2|b|, \text{ и если } a \neq 0, \text{ то } ab > 0.$$

Доказательство леммы 10.6 требует перебора семи случаев в зависимости от свойств $g_{\mu+1}$.

Рассмотрим сначала четыре случая, в которых $g_{\mu+1}$ коммутирует с $g_\mu = x_{12}$.

С л у ч а й 1. Предположим, что $g_{\mu+1} = x_{1j}^e$, где $j \geq 3$. Не уменьшая общности, можно ограничиться случаями $j=3$ и $n=3$. Тогда $g_{\mu+1}$ переводит (a, b, c) в $(a, b, \varepsilon a + c)$, причем

$$|c| > |\varepsilon a + c|.$$

Теперь изменим слово $g_1 \dots g_r \omega$, заменив произведение $g_\mu g_{\mu+1} = x_{12} x_{13}^e$ на $x_{13}^e x_{12}$. Тогда преобразование

$$(a, b - a, c) \xrightarrow{g_\mu} (a, b, c) \xrightarrow{g_{\mu+1}} (a, b, a + c)$$

заменится на

$$(a, b - a, c) \mapsto (a, b - a, \varepsilon a + c) \mapsto (a, b, \varepsilon a + c).$$

При этом числа σ_α не изменятся, за исключением того, что $\sigma_\mu = \|(a, b, c)\|$ перейдет в $\sigma'_\mu = \|(a, b - a, \varepsilon a + c)\|$ и

$$\sigma_{\mu-1} > \sigma'_\mu.$$

Проверяется, что пара (λ', μ') , связанная с новой последовательностью, меньше, чем (λ, μ) .

С л у ч а й 2. Если $g_{\mu+1} = x_{ij}^e$, где i, j больше двух, то доказательство проходит в точности так же, как в случае 1.

С л у ч а й 3. Предположим, что $g_{\mu+1} = g_\mu^e = x_{12}^e$. Если $\varepsilon = -1$, то множитель $g_\mu g_{\mu+1}$ сокращается и пара (λ, μ) уменьшается. Равенство $\varepsilon = +1$ невозможно, потому что тогда

$$(a, b, c) g_{\mu+1} = (a, b + a, c)$$

и

$$|b - a| \leq |b| > |b + a|,$$

чего не может быть.

Случай 4. Если $g_{\mu+1} = x_{32}^\varepsilon$ (или x_{i2}^ε при $i \geq 3$), рассуждение заметно усложняется. Отметим, что элемент $x_{12}x_{32}^\varepsilon$ в группе Стейнберга можно записать также в виде $x_{32}^\varepsilon x_{12}$, или $x_{13}^\varepsilon x_{32}^\varepsilon x_{13}^{-\varepsilon}$, или $x_{31}^\varepsilon x_{12} x_{31}^{-\varepsilon}$. (Все эти тождества доказываются очевидным образом.) Это означает, что преобразование

$$(a, b - a, c) \mapsto (a, b, c) \mapsto (a, b + \varepsilon c, c),$$

отвечающее произведению $x_{12}x_{32}^\varepsilon$, можно заменить либо на

$$(a, b - a, c) \mapsto (a, b - a + \varepsilon c, c) \mapsto (a, b + \varepsilon c, c),$$

либо на

$$\begin{aligned} (a, b - a, c) &\mapsto (a, b - a, c + \varepsilon a) \mapsto \\ &\mapsto (a, b + \varepsilon c, c + \varepsilon a) \mapsto (a, b + \varepsilon c, c), \end{aligned}$$

либо же на

$$\begin{aligned} (a, b - a, c) &\mapsto (a + \varepsilon c, b - a, c) \mapsto \\ &\mapsto (a + \varepsilon c, b + \varepsilon c, c) \mapsto (a, b + \varepsilon c, c). \end{aligned}$$

Проверяется, что первая замена уменьшит (λ, μ) , если

$$(2) \quad |b - a| > |b - a + \varepsilon c|.$$

Аналогично вторая уменьшит (λ, μ) , если

$$(3) \quad |c| > |c + \varepsilon a|,$$

а третья — если

$$(4) \quad |a| > |a + \varepsilon c|.$$

Покажем, что хоть одно из этих неравенств выполняется. Заметим сначала, что из неравенства $\sigma_\mu > \sigma_{\mu+1}$ вытекает, что

$$|b| > |b + \varepsilon c|.$$

Следовательно, b и εc должны иметь противоположные знаки. Если $a \neq 0$, то из (1) следует, что a и εc имеют противоположные знаки и, стало быть, выполняются либо (3), либо (4). Если же $a = 0$, то выполняется (2). Этим завершается обсуждение случая 4.

Остается рассмотреть разные случаи, в которых g_μ и $g_{\mu+1}$ не коммутируют.

Случай 5. Если $g_{\mu+1} = x_{21}^e$, то произведение $g_\mu g_{\mu+1}$ отвечает преобразованию

$$(5) \quad (a, b - a) \mapsto (a, b) \mapsto (a + \varepsilon b, b),$$

для которого

$$|a| > |a + \varepsilon b|.$$

Если $\varepsilon = +1$, то a и b должны иметь разные знаки в противоречие с (1). Поэтому можно считать, что $\varepsilon = -1$. Заменим произведение $x_{12}x_{21}^{-1}$ на $x_{21}\omega_{21}(-1)$ и вспомним, что элемент $\omega_{21}(-1)$ можно вынести через $g_{\mu+2}g_{\mu+3}\dots g_r$ с помощью п. 9.4 или п. 10.4. Тогда преобразование (5) заменится на

$$(a, b - a) \xrightarrow{x_{21}} (b, b - a).$$

Очевидно, это уменьшает (λ, μ) .

Случай 6. Предположим, что $g_{\mu+1} = x_{23}^e$ (или x_{2j}^e с $j \geq 3$). В этом случае слово $x_{12}x_{23}^e$ можно заменить либо на $x_{13}^e x_{23}^e x_{12}$, либо на $x_{23}^e x_{13}^e x_{12}$, либо же на $x_{21}x_{13}^e x_{12}^{-1}\omega_{12}$. Соответственно преобразование

$$(a, b - a, c) \mapsto (a, b, c) \mapsto (a, b, c + \varepsilon b)$$

заменяется на одно из следующих:

$$\begin{aligned} & (a, b - a, c) \mapsto (a, b - a, c + \varepsilon a) \mapsto \\ & \mapsto (a, b - a, c + \varepsilon b) \mapsto (a, b, c + \varepsilon b), \\ & (a, b - a, c) \mapsto (a, b - a, c + \varepsilon b - \varepsilon a) \mapsto \\ & \mapsto (a, b - a, c + \varepsilon b) \mapsto (a, b, c + \varepsilon b) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & (a, b - a, c) \mapsto (b, b - a, c) \mapsto \\ & \mapsto (b, b - a, c + \varepsilon b) \mapsto (b, -a, c + \varepsilon b). \end{aligned}$$

Таким образом, (λ, μ) уменьшается, если соответственно

$$(6) \quad |c| > |c + \varepsilon a|,$$

$$(7) \quad |c| > |c + \varepsilon b - \varepsilon a|$$

или

$$(8) \quad |a| > |b|$$

(использовать неравенство $|b - a| \leq |b|$). Из неравенства $\sigma_\mu > \sigma_{\mu+1}$ следует, что

$$|c| > |c + \varepsilon b|,$$

так что c и εb имеют противоположные знаки, и

$$|b| < 2|c|.$$

Если $a = 0$, то выполнено неравенство (7). Если же $a \neq 0$, так что $ab > 0$ в силу (1), то εa и c имеют разные знаки. Но тогда либо $|a| < 2|c|$, откуда следует (6), либо $|a| \geq 2|c|$, откуда следует (8).

С л у ч а й 7. Если $g_{\mu+1} = x_{31}^\varepsilon$ (или x_{i1}^ε с $i \geq 3$), то $x_{12}x_{31}^\varepsilon$ совпадает с $x_{31}^\varepsilon x_{12}x_{32}^{-\varepsilon}$ и с $x_{31}^\varepsilon x_{13}^{-\varepsilon} x_{32}^{-\varepsilon} x_{13}^\varepsilon$. Следовательно, преобразование

$$(a, b - a, c) \mapsto (a, b, c) \mapsto (a + \varepsilon c, b, c)$$

можно заменить либо на

$$\begin{aligned} (a, b - a, c) &\mapsto (a + \varepsilon c, b - a, c) \mapsto \\ &\mapsto (a + \varepsilon c, b + \varepsilon c, c) \mapsto (a + \varepsilon c, b, c), \end{aligned}$$

либо на

$$\begin{aligned} (a, b - a, c) &\mapsto (a + \varepsilon c, b - a, c) \mapsto (a + \varepsilon c, b - a, -\varepsilon a) \mapsto \\ &\mapsto (a + \varepsilon c, b, -\varepsilon a) \mapsto (a + \varepsilon c, b, c). \end{aligned}$$

Пара (λ, μ) уменьшится, если соответственно

$$(9) \quad |b + \varepsilon c| \leq |b|$$

или

$$(10) \quad |c| \geq |a|.$$

В этом случае из неравенства $\sigma_\mu > \sigma_{\mu+1}$ следует, что

$$|a| > |a + \varepsilon c|,$$

так что знаки a и εc разные, и

$$|c| < 2|a|.$$

Поэтому знаки b и εc разные в силу (1), так что либо $|c| \leq 2|b|$, откуда следует (9), либо же $|c| \geq 2|b|$, что вместе с (1) влечет за собой (10). Это завершает доказательство леммы Сильвестера. ■

Следующий шаг в доказательстве 10.1 и 10.5 таков:

Лемма 10.7. При $n \geq 2$ ядро естественного гомоморфизма $\varphi: \text{St}(n, Z) \rightarrow E(n, Z)$ содержится в подгруппе W_n .

Доказательство индукцией по n . Так как при $n=1$ утверждение, очевидно, справедливо, мы можем считать, что $n \geq 2$. В качестве стандартного вектора β в Z^n возьмем $(0, 0, \dots, 0, 1)$. По лемме Сильвестера любой элемент в ядре φ можно записать в виде произведения $g_1 \dots g_r \omega$ со свойством

$$1 \leq \|\beta g_1\| \leq \|\beta g_1 g_2\| \leq \dots \leq \|\beta g_1 \dots g_r \omega\| = 1.$$

Из уравнения $\|\beta g_1\| = 1$ следует, что образующая Стейнберга g_1 должна оставлять β на месте. Индукция показывает, что то же должно быть верным для всех g_α . Далее, поскольку $\varphi(g_1 \dots g_r \omega) = 1$, элемент $\omega \in W_n$ также должен оставлять β на месте.

Следовательно, слово $g_1 \dots g_r$ не может содержать ни одну образующую Стейнберга x_{ij}^ε с $i=n$. Оно может содержать образующую x_{ij}^ε с $j=n$, но в этом случае с помощью соотношений Стейнберга все эти образующие можно сдвинуть в левый конец. Обозначив через x произведение всех таких образующих, мы сможем записать $g_1 \dots g_r \omega$ в виде произведения

$$x \iota(y) \omega,$$

где ι обозначает естественный гомоморфизм

$$\iota: \text{St}(n-1, Z) \rightarrow \text{St}(n, Z).$$

Проиллюстрируем ситуацию на примере $n=4$: матрицы $\varphi(x)$ и $\varphi(\iota(y)\omega)$ должны иметь вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} * & * & * & 0 \\ * & * & * & 0 \\ * & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

соответственно. Но произведение этих матриц равно I .

Следовательно,

$$\varphi(x) = \varphi(\iota(y)\omega) = I$$

и из леммы 5.2 тогда вытекает, что $x = 1$.

Теперь запишем ω в виде произведения $\iota(\omega')c$ с условиями

$$\omega' \in W_{n-1}, \quad c \in W_n \cap \text{Ker } \varphi.$$

Отсюда следует, что рассмотренный в самом начале элемент $g_1 \dots g_r \omega$ ядра гомоморфизма φ может быть представлен в виде произведения $\iota(y\omega')c$. Но $y\omega'$ лежит в ядре гомоморфизма

$$\text{St}(n-1, Z) \rightarrow E(n-1, Z),$$

значит, $y\omega' \in W_{n-1}$ по индуктивному предположению. Поэтому $\iota(y\omega') \in W_n$, что доказывает лемму 10.7. ■

Теперь основные теоремы получаются без труда.

Доказательство 10.1. Так как ядро гомоморфизма φ содержится в W_n , из 9.3 и 9.11 следует, что это ядро лежит в центре и порождено $\{-1, -1\}$. Но, согласно 9.7 и 8.4, порядок элемента $\{-1, -1\} \in \text{St}(n, Z)$ в точности равен двум. ■

Доказательство 10.5. Соотношение $\omega_{12}\omega_{21} = 1$ в $\text{St}(2, Z)$ показывает, что группа W_2 циклична. Так как порядок $\varphi(\omega_{12})$ равен 4, ядро φ порождено элементом $(\omega_{12})^4$. Как в п. 9.3, ядро лежит в центре. Тот факт, что никакая степень ω_{12} не равна единице в $\text{St}(2, Z)$, можно установить, построив гомоморфизм

$$\tilde{\varphi}: \text{St}(2, R) \rightarrow \tilde{E}(2, R),$$

как в п. 7.5. ■

Вот еще одно следствие из 10.1. Для любого целого числа $m > 1$ рассмотрим точную последовательность (§ 6.2)

$$\dots \rightarrow K_2Z \rightarrow K_2(Z/mZ) \rightarrow K_1(mZ) \rightarrow K_1(Z) \dots$$

Пользуясь теоремой Менникке, Басса, Лазара и Серра о том, что $SK_1(mZ) = 1$, мы заключаем, что группа

$K_2(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ также порождена элементом $\{-1, -1\}$. Если m — степень нечетного простого числа, из п. 9.9 следует, что $K_2(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = 1$. Более общо, изоморфизм

$$K_2(\Lambda \times \Lambda') \cong K_2\Lambda \times K_2\Lambda'$$

и китайская теорема об остатках вместе влекут за собой следующий результат:

Следствие 10.8. *Если $m \not\equiv 0 \pmod{4}$, то $K_2(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = 1$.*

Деннис недавно показал, что если $m \equiv 0 \pmod{4}$, то $K_2(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

§ 11. ВЫЧИСЛЕНИЕ K_2 ДЛЯ ПОЛЯ ПО МАЦУМОТО

Группа K_2F для любого поля F была описана образующими и соотношениями в диссертации Мацумото, основанной на более ранней работе Мура (см. литературу, цитированную во введении).

В этом параграфе мы сформулируем теорему Мацумото и затем выведем из нее некоторые следствия. В частности, мы полностью вычислим группу K_2Q , следуя одному письму Джона Тэйта; здесь Q — поле рациональных чисел.

В § 9 мы видели, что группа K_2F для поля F порождена некоторыми символами $\{x, y\}$. Здесь x и y пробегает элементы мультипликативной группы $F^\bullet = F \setminus \{0\}$.

ТЕОРЕМА 11.1 (Мацумото). *Абелева группа K_2F имеет следующее представление образующими и соотношениями. Образующие $\{x, y\}$ с $x, y \in F^\bullet$ подчинены только следствиям соотношений из списка:*

- (1) $\{x, 1-x\} = 1$ при $x \neq 0, 1$,
- (2) $\{x_1x_2, y\} = \{x_1, y\} \{x_2, y\}$,
- (3) $\{x, y_1y_2\} = \{x, y_1\} \{x, y_2\}$.

Доказательство будет дано в § 12.

Так как ядро C_n центрального расширения $\text{St}(n, F) \rightarrow \text{SL}(n, F)$ порождено аналогичными символами $\{x, y\}$, которые удовлетворяют тем же соотношениям (см. пп. 9.7, 9.8, 9.11 и 9.12), существует каноническая сюръекция $K_2F \rightarrow C_n$. Отсюда немедленно вытекает

Следствие 11.2. *Для любого поля F группы*

$$C_3 \rightarrow C_4 \rightarrow C_5 \rightarrow \dots$$

канонически изоморфны друг другу и своему прямому пределу K_2F .

Стало быть, мультипликатор Шура $H_2 \text{SL}(n, F)$ также изоморфен K_2F для всех $n \geq 3$, за исключением особых случаев $n=3$ и $|F|=2$ или 4 и $n=4$, $|F|=2$. (Ср. замечание к теореме 5.10.)

Символы Стейнберга

Вот переформулировка теоремы 11.1.

Следствие 11.3. Для любого бимультимпликативного символа

$$x, y \mapsto c(x, y)$$

на $F^\bullet$ со значениями в мультипликативной абелевой группе A , который удовлетворяет условию

$$c(x, 1-x) = 1,$$

существует единственный гомоморфизм из K_2F в A , при котором $\{x, y\}$ переходит в $c(x, y)$ для всех x и y .

Любое такое бимультимпликативное спаривание $c: F^\bullet \times F^\bullet \rightarrow A$ со значениями в абелевой группе A , удовлетворяющее условиям $c(x, 1-x) = 1$, будет называться символом Стейнберга для поля F .

Классическим примером символа Стейнберга является символ Гильберта квадратичного вычета в локальном поле: $c(a, b) = +1$ или -1 в соответствии с тем, имеет ли уравнение $ax^2 + by^2 = 1$ решение в поле или нет. (См., например, O'Meara O., Introduction to Quadratic Forms, Berlin, Springer, 1963, стр. 164.) Более общо, если F — локальное поле, содержащее корни из единицы степени n , то можно определить символ норменного вычета степени n , принимающий значения в группе корней n -й степени (см. п. 15.9).

Заметим, что любой символ Стейнберга обязательно кососимметричен,

$$c(x, y) = c(y, x)^{-1},$$

и удовлетворяет тождеству

$$c(x, -x) = 1.$$

Действительно, так как $-x = (1-x)/(1-x^{-1})$, тождество $c(x, -x) = 1$ можно установить, разделив равенство $c(x, 1-x) = 1$ на $c(x, 1-x^{-1}) = c(x^{-1}, 1-x^{-1})^{-1} = 1$. Умножив теперь $c(x, y)$ на $c(x, -x)$, разделив на $c(xy, -xy)$ и затем снова умножив на $c(y^{-1}, -y^{-1})$, мы получим уравнение

$$c(x, y) = c(x, -xy) = c(y^{-1}, -xy) = c(y^{-1}, x),$$

которое доказывает кососимметричность. Мы будем часто пользоваться этими символами в § 12.

Замечание. Важное следствие из 11.2 и 11.3 таково. Существует взаимно однозначное соответствие между символами Стейнберга для F со значениями в A и центральными расширениями группы $SL(n, F)$ с ядром A . (Здесь мы предполагаем, что $n \geq 3$, и исключаем три особых случая $SL(3, F_2)$, $SL(3, F_4)$ и $SL(4, F_2)$.) Действительно, любое центральное расширение

$$1 \rightarrow A \rightarrow G \xrightarrow{\psi} SL(n, F) \rightarrow 1$$

определяет символ Стейнберга

$$c(u, v) = \left[\psi^{-1} \begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & u^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \psi^{-1} \begin{pmatrix} v & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & v^{-1} \end{pmatrix} \right] = \gamma(\{u, v\}),$$

где γ означает единственный гомоморфизм из $St(n, F)$ в G над $SL(n, F)$ (ср. доказательство теоремы 5.10). Обратно, пусть дан символ Стейнберга c . Обозначим через

$$N \subset C_n \times A \subset St(n, F) \times A$$

график гомоморфизма

$$\{u, v\} \mapsto c(u, v)^{-1}$$

из C_n в A . Тогда

$$G = (St(n, F) \times A) / N$$

дает требуемое центральное расширение

$$1 \rightarrow A \rightarrow G \rightarrow SL(n, F) = 1.$$

На языке гомологической алгебры множество всех таких классов центральных расширений (с точностью до изоморфизма) с ядром A образует группу

$$H^2(SL(n, F); A) \cong \text{Hom}(H_2 SL(n, F), A) \cong \text{Hom}(K_2 F, A),$$

которая изоморфна группе символов Стейнберга со значениями в A .

Если поле F снабжено некоторой топологией, так что $SL(n, F)$ — топологическая группа, то естественно

рассмотреть те центральные расширения, которые также являются топологическими группами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть S — хаусдорфова топологическая группа. Тогда *топологическим расширением групп* будет называться точная последовательность

$$1 \rightarrow A \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\psi} S \rightarrow 1,$$

в которой A и G — хаусдорфовы топологические группы, гомоморфизм ι непрерывен и замкнут, а гомоморфизм ψ непрерывен и открыт. (Эти условия равносильны требованию, чтобы A гомеоморфно погружалась в G в качестве замкнутой подгруппы, а G/A гомеоморфно отображалась на S .)

Мацумото доказывает следующий результат. Предположим, что F — хаусдорфово поле с непрерывными сложением, умножением и делением и что A — коммутативная хаусдорфова топологическая группа.

УТВЕРЖДЕНИЕ 11.4. *Символ Стейнберга c для поля F со значениями в группе A порождает центральное топологическое расширение группы $SL(n, F)$ в том и только том случае, когда он является непрерывной функцией двух переменных и удовлетворяет условию*

$$\lim_{a, b \rightarrow 0} c(a, 1 + ab) = 1.$$

За доказательством достаточности этих условий мы отсылаем читателя к работе Мацумото. Вот набросок доказательства их необходимости. Предположим, что дано центральное топологическое расширение. Пусть γ — единственный гомоморфизм из $St(n, F)$ в G над $SL(n, F)$. Покажем сначала, что гомоморфизм

$$b \mapsto \gamma(x_{12}^b)$$

из F в G непрерывен. Очевидно, достаточно проверить непрерывность при b , стремящемся к нулю. Функция на G со значениями в G

$$g \mapsto [\gamma(x_{13}^1), g],$$

очевидно, непрерывна. Следовательно, для любой окрестности единицы U в G существует такая окрестность

единицы V , что $[\gamma(x_{13}^1), g] \in U$, когда $g \in V$. Поскольку функция

$$b \mapsto e_{32}^b = \psi(\gamma(x_{32}^b))$$

из F в $SL(n, F)$, очевидно, непрерывна, а $\psi(V)$ является открытым подмножеством в $SL(n, F)$, существует такая окрестность N нуля в F , что $e_{32}^b \in \psi(V)$, когда $b \in N$. Теперь для любого элемента $b \in N$ выберем $g \in V$ так, чтобы $\psi(g) = e_{32}^b$. Тогда коммутатор

$$[\gamma(x_{13}^1), g] = [\gamma(x_{13}^1), \gamma(x_{32}^b)] = \gamma(x_{12}^b)$$

лежит в U . Значит, $\gamma(x_{12}^b)$ непрерывно зависит от b .

Отсюда немедленно следует, что элементы группы $\gamma(w_{ij}(u))$ и $\gamma(h_{ij}(u))$ непрерывно зависят от параметра u . Поэтому символ

$$c(u, v) = \gamma(\{u, v\}) = \gamma([h_{12}(u), h_{13}(v)])$$

непрерывен как функция двух переменных.

В этом месте Мацумото привлекает следующее тождество. Допустим, мы хотим записать элемент $x_{12}^a x_{21}^b \in \text{St}(n, F)$ в виде произведения $x_{21}^\lambda \omega x_{12}^\mu$. Пользуясь методами п. 9.15 и повозившись немного, мы придем к формуле

$$x_{12}^a x_{21}^b = x_{21}^{bd} h_{21}(d) x_{12}^{ad} \{a, d^{-1}\},$$

где $d = (1 + ab)^{-1}$. Таким образом, если a и b стремятся к нулю в F , то d стремится к 1 в F и элементы группы $\gamma(x_{12}^a x_{21}^b)$ и $\gamma(x_{21}^{bd} h_{21}(d) x_{12}^{ad})$ стремятся к 1 в G . Следовательно, символ

$$\gamma(\{a, d^{-1}\}) = c(a, d^{-1}) = c(a, 1 + ab)$$

также должен стремиться к единице. Это завершает наше обсуждение 11.4.

Вот один простой способ строить символы Стейнберга. Напомним, что *дискретным нормированием* v поля F называется гомоморфизм мультипликативной группы $F^\times$ на аддитивную группу целых чисел, удовлетворяющий условию $v(x + y) \geq \min(v(x), v(y))$. Соответствующее *кольцо нормирования* $\Lambda \subset F$ состоит из всех x с $v(x) \geq 0$ и нуля. В этом кольце существует

единственный максимальный идеал $\mathfrak{P} \subseteq \Lambda$; факторкольцо $\Lambda/\mathfrak{P}$ называется полем классов вычетов $\bar{F}$.

ЛЕММА 11.5. Формула

$$d_v(x, y) = (-1)^{v(x)v(y)} x^{v(y)}/y^{v(x)} \bmod \mathfrak{P}$$

определяет непрерывный символ Стейнберга d_v на F со значениями в дискретной группе $\bar{F}^\bullet = (\Lambda/\mathfrak{P})^\bullet$.

(Ср. Serre J.-P., Corps locaux, Paris, Hermann, 1968, стр. 217.) Этот символ d_v называется *ручным символом*, ассоциированным с нормированием v . Очевидно, d_v индуцирует некоторый гомоморфизм из $K_2 F$ на группу $\bar{F}^\bullet = K_1(\bar{F})$.

Доказательство 11.5. Элемент $\pm x^{v(y)}/y^{v(x)}$ является единицей в Λ , потому что $x^{v(y)}$ и $y^{v(x)}$ имеют один и тот же образ относительно v . Ясно, что символ d_v бимультимпликативен и непрерывен в v -топологии. Доказательство тождества $d_v(1-x, x) = 1$ потребует разбора нескольких случаев. Если $v(x) > 0$, то $x \in \mathfrak{P}$, так что $1-x \equiv 1 \bmod \mathfrak{P}$ и $v(1-x) = 0$, откуда

$$(-1)^{v(1-x)v(x)} (1-x)^{v(x)}/x^{v(1-x)} = (1-x)^{v(x)} \equiv 1 \bmod \mathfrak{P}.$$

Аналогично проходит доказательство в случае $v(1-x) > 0$. Предположим теперь, что $v(x) < 0$. Тогда $x^{-1} \in \mathfrak{P}$, так что частное

$$(1-x)/x = -1 + x^{-1} \equiv -1 \bmod \mathfrak{P}$$

является единицей. Поэтому $v(1-x) = v(x)$ и

$$(1-x)^{v(x)}/x^{v(1-x)} = ((1-x)/x)^{v(x)} \equiv (-1)^{v(x)} \bmod \mathfrak{P}.$$

Умножая это на $(-1)^{v(1-x)v(x)} = (-1)^{v(x)}$, мы получаем $1 \bmod \mathfrak{P}$, что и требовалось. Случай $v(1-x) < 0$ разбирается аналогично. Так как последний оставшийся случай $v(x) = v(1-x) = 0$ тривиален, это доказывает 11.5. ■

Квадратичный закон взаимности по Гауссу

Чтобы проиллюстрировать все эти понятия, рассмотрим поле рациональных чисел Q . Какие символы Стейнберга $s(x, y)$ можно определить для него?

Для любого простого числа p p -адическое нормирование v_p на Q определяет символ Стейнберга $d_{v_p}(x, y)$ со значениями в циклической группе $(Z/pZ)^\cdot$ порядка $p-1$. Если p нечетно, то мы будем обозначать этот символ просто $(x, y)_p$, а его группу значений $(Z/pZ)^\cdot$ через A_p .

При $p=2$ эта конструкция бесполезна. Однако 2-адический символ $(x, y)_2$ можно определить следующим способом. Любое ненулевое рациональное число можно однозначно записать в виде $\pm 2^j 5^k u$, где $k=0$ или 1 , а u — отношение целых чисел, сравнимых с $1 \pmod{8}$. Пусть теперь

$$x = (-1)^i 2^j 5^k u, \quad y = (-1)^l 2^J 5^K u'.$$

Тогда

$$(x, y)_2 = (-1)^{iI + jK + kJ}.$$

Таким образом, группой значений A_2 является циклическая группа $\{\pm 1\}$. Мы оставим читателю в качестве упражнения проверку того, что это действительно символ Стейнберга.

Замечание. Следующее утверждение может служить некоторой мотивировкой определения символа $(x, y)_p$.

Предположим, что некоторый символ Стейнберга $s: Q^\cdot \times Q^\cdot \rightarrow A$ со значениями в хаусдорфовой топологической группе A непрерывен в p -адической топологии группы $Q^\cdot$ для некоторого p . Тогда существует единственный гомоморфизм из A_p в A , переводящий символ $(x, y)_p$ в $s(x, y)$ для всех x и y .

Короче говоря, $(x, y)_p$ — «универсальный непрерывный символ Стейнберга» относительно p -адической топологии на $Q^\cdot$. Это утверждение является частным случаем гораздо более общей теоремы Мура, которая будет доказана в приложении.

Вот набросок его доказательства. Пусть p^n — степень простого числа, большая двух. Тогда сравнение

$$(4) \quad (1 - rp^n)^p \equiv 1 - rp^{n+1} \pmod{p^{n+2}}$$

легко следует из биномиальной формулы. Предположим теперь, что p — нечетное число и что r взаимно просто с p . Пусть u_1 — любое рациональное число вида s/t ,

где $s \equiv t \equiv 1 \pmod{p}$. Из (4) видно, что u_1 можно как угодно хорошо приблизить степенями числа $1 - rp$ в p -адической топологии. Действительно, сначала выберем i так, чтобы

$$(1 - rp)^i t \equiv s \pmod{p^2},$$

затем j так, чтобы

$$(1 - rp)^{i+jp} t \equiv s \pmod{p^3}$$

и так далее.

Поскольку $c(rp, (1 - rp)^i) = 1$ для любого i , по непрерывности получаем, что $c(rp, u_1) = 1$ для любого такого числа $u_1 = s/t$. Учтем теперь, что вся мультипликативная группа Q^* порождена произведениями rp , где r взаимно просто с фиксированным простым числом p . Тем самым мы показали, что

$$(5) \quad c(x, u_1) = 1 \text{ для всех } x \in Q^*.$$

Если r, r' — целые числа, взаимно простые с p , то из (5) видно, что $c(r, r')$ зависит только от классов вычетов r и r' по модулю p . Применив теперь теорему Стейнберга о том, что любой символ для конечного поля тривиален (п. 9.9), мы получаем

$$(6) \quad c(r, r') = 1.$$

Пусть λ — представитель первообразного класса вычетов по модулю p . Тогда любой элемент x, y в Q^* более или менее однозначно записывается в виде

$$x = p^i \lambda^j u_1, \quad y = p^{i'} \lambda^{j'} u_1',$$

откуда следует, что

$$c(x, y) = c(p, p)^{ii'} c(\lambda, \lambda)^{jj' - ij'}.$$

Так как равенства

$$c(\lambda, p)^{p-1} = c(\lambda^{p-1}, p) = 1$$

и

$$c(p, p) = c(-1, p) = c(\lambda, p)^{(p-1)/2}$$

следуют из (5), доказательство для нечетных p теперь легко завершается.

Для $p=2$ аналогичное рассуждение показывает, что любое число u , представимое в виде отношения s/t с $s \equiv t \equiv 1 \pmod{8}$, можно приблизить как угодно хорошо в 2-адической топологии степенью 9. Пользуясь равенствами

$$c(9, -1) = c(3, -1)^2 = c(3, (-1)^2) = 1,$$

$$c(9, -2) = c(3, -2)^2 = 1,$$

$$c(9, 3) = c(-3, 3)^2 = 1,$$

мы по непрерывности заключаем, что

$$c(u, -1) = c(u, -2) = c(u, 3) = 1$$

для каждого такого значения u . Так как числа $-1, -2$ и 3 порождают всюду плотную подгруппу в Q , это доказывает, что

$$(7) \quad c(u, x) = 1 \quad \text{для всех } x.$$

Рассмотрим для примера $u = -5/3$, тогда

$$c(5, x) = c(-3, x).$$

Положив здесь $x=4$, мы находим $c(5, 4) = 1$, откуда $c(5, -1) = c(5, -4) = 1$, так что

$$(8) \quad c(5, 5) = c(5, -1) = 1.$$

Аналогично уравнение $c(-5, -1) = c(3, x)$ для $x = -2$ даст $c(-5, -2) = 1$, откуда

$$(9) \quad c(5, 2) = c(-1, -1).$$

Комбинируя (7), (8) и (9) с очевидным уравнением $c(2, 2) = c(2, -1) = 1$, получаем

$$c((-1)^i 2^j 5^k u, (-1)^l 2^J 5^K u') = c(-1, -1)^{iI + jK + kJ},$$

что, очевидно, завершает доказательство. ■

Пользуясь этими символами Стейнберга $(x, y)_p$, мы готовы теперь вычислить группу $K_2 Q$.

ТЕОРЕМА 11.6 (Тэйт). *Группа $K_2 Q$ канонически изоморфна прямой сумме $A_2 \oplus A_3 \oplus A_5 \oplus \dots$, где A_2 — циклическая группа $\{\pm 1\}$ и $A_p = (Z/pZ)$ при нечетных p .*

Этот изоморфизм будет индуцирован отображением

$$\{x, y\} \mapsto (x, y)_2 \oplus (x, y)_3 \oplus (x, y)_5 \oplus \dots$$

для всех x, y в Q ,

Тэйт замечает, что его доказательство этой теоремы является непосредственным видоизменением метода, который Гаусс избрал для своего первого доказательства квадратичного закона взаимности (ср. Гаусс К. Ф., Арифметические исследования, «Труды по теории чисел», Изд-во АН СССР, М., 1959).

Начнем с того, что символом L_m для каждого целого положительного числа m обозначим подгруппу K_2Q , порожденную всеми элементами $\{x, y\}$, где x, y — целые числа, по модулю не превосходящие m . Очевидно,

$$L_1 \subset L_2 \subset L_3 \subset \dots$$

и объединение этих групп равно K_2Q . Заметим, что $L_m = L_{m-1}$, если m — не простое число.

Лемма 11.7. Для каждого простого числа p факторгруппа L_p/L_{p-1} циклическа порядка $p-1$.

В частности, факторгруппа L_2/L_1 тривиальна. Если принять эту лемму, доказательство без труда завершится следующим образом.

Для каждого простого числа p соответствие $\{x, y\} \mapsto \mapsto (x, y)_p$ определяет некоторый гомоморфизм из K_2Q в A_p . Ясно, что если p нечетно, то этот гомоморфизм аннулирует L_{p-1} , но отображает L_p на циклическую группу $A_p = (Z/pZ)^\times$. Следовательно, он индуцирует изоморфизм $L_p/L_{p-1} \cong A_p$. С другой стороны, при $p=2$ этот гомоморфизм отображает образующую $\{-1, -1\}$ группы L_1 на элемент $(-1, -1)_2 = -1$ и, следовательно, индуцирует некоторый изоморфизм группы $L_1 = L_2$ на A_2 . Теперь легкая индукция показывает, что для каждого простого числа p соответствие

$$\{x, y\} \mapsto (x, y)_2 \oplus (x, y)_3 \oplus \dots \oplus (x, y)_p$$

отображает группу L_p изоморфно на прямую сумму $A_2 \oplus A_3 \oplus \dots \oplus A_p$. Переходя к прямому пределу при $p \rightarrow \infty$, получаем теорему.

Чтобы доказать лемму 11.7, рассмотрим соответствие

$$\varphi: (Z/pZ) \rightarrow L_p/L_{p-1},$$

определенное формулой

$$x \mapsto \{x, p\} \bmod L_{p-1}.$$

Здесь x пробегает все нулевые целые числа, по модулю меньшие p . Чтобы показать, что φ определяет гомоморфизм, рассмотрим соотношение

$$xy \equiv z \bmod p,$$

где x, y, z — ненулевые целые числа, по модулю меньшие p . Тогда $xy = z + pr$, где $|pr| \leq |xy| + |z| \leq (p-1)^2 + p - 1$, и, значит, $|r| < p$. В этих условиях

$$1 = z/xy + pr/xy,$$

так что

$$1 = \{z/xy, pr/xy\} \equiv \{z/xy, p\} \bmod L_{p-1}.$$

Поэтому

$$\{z, p\} \equiv \{xy, p\} \bmod L_{p-1},$$

так что φ — гомоморфизм, притом корректно определенный (положить $y = 1$).

Чтобы доказать, что φ сюръективен, заметим, что группа L_p порождена символами $\{x, \pm p\}$, $\{\pm p, x\}$ и $\{\pm p, \pm p\}$ и подгруппой L_{p-1} . Тождества

$$\{-p, -p\} \equiv \{p, p\} \equiv \varphi(-1) \bmod L_{p-1},$$

$$\{\pm p, x\}^{-1} = \{x, \pm p\} \equiv \varphi(x) \bmod L_{p-1}$$

и

$$\{-p, p\} = \{p, -p\} = 1$$

показывают, что φ сюръективен. Это доказывает, что в группе L_p/L_{p-1} не больше $p-1$ элементов. Пользуясь символом $(x, y)_p$, мы уже проверили, что L_p/L_{p-1} состоит по меньшей мере из $p-1$ элементов. Это завершает доказательство. ■

Вот другая формулировка нашего результата.

Следствие 11.8. Для любого символа Стейнберга $s(x, y)$ на поле рациональных чисел со значениями

в абелевой группе A существуют однозначно определенные гомоморфизмы

$$\varphi_p: A_p \rightarrow A,$$

такие, что

$$c(x, y) = \prod \varphi_p((x, y)_p),$$

где произведение распространено на все простые числа p .

Результат в этой формулировке можно было бы доказать непосредственно, даже не упоминая K_2 .

Чтобы проиллюстрировать это следствие, рассмотрим локальный символ $(x, y)_\infty$, определенный формулой

$$(x, y)_\infty = \begin{cases} +1, & \text{если } x > 0 \text{ или } y > 0, \\ -1, & \text{если } x, y < 0, \end{cases}$$

который индуцирован вложением рациональных чисел в вещественные. (Ср. п.8.4.) Это «универсальный непрерывный символ Стейнберга» относительно архимедовой топологии поля $\mathbb{Q}$. Согласно 11.8, должно существовать соотношение вида

$$(x, y)_\infty = \prod \varphi_p((x, y)_p).$$

Действительно, имеет место следующий

Квадратичный закон взаимности. Символ $(x, y)_\infty$ совпадает с произведением по всем простым числам p символов $((x, y))_p$. Символ Гильберта $((x, y))_p = \pm 1$ по определению равен $(x, y)_2$ при $p = 2$ и

$$((x, y))_p \equiv (x, y)_p^{(p-1)/2} \pmod{p}$$

для нечетных p .

Доказательство. Из следствия 11.8 ясно, что существует соотношение вида

$$(x, y)_\infty = \prod ((x, y))_p^{\varepsilon_p}.$$

где показатели $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_5, \dots$ должны быть нулями или единицами. Положив $x = y = -1$, обнаруживаем, что показатель ε_2 должен быть единицей. Если p — простое число вида $8k \pm 3$, то из равенств

$$(2, p)_\infty = 1, \quad (2, p)_2 = -1$$

видно, что

$$((2, p))_{p^p}^{\varepsilon_p} = -1,$$

так что ε_p не может быть нулем. Аналогично если p — простое число вида $8k+7$ (или $8k+3$), то уравнения

$$(-1, p)_{\infty} = 1, \quad (-1, p)_2 = -1$$

показывают, что ε_p не может быть нулем.

Остается только случай простого числа вида $8k+1$. Следуя Гауссу, докажем такой результат.

Лемма 11.9. *Если p — простое число вида $8k+1$, то существует такое простое число $q < \sqrt{p}$, что p не является квадратичным вычетом $\bmod q$.*

(Примеры типа $109 \equiv 2^2 \bmod 3 \cdot 5 \cdot 7$ показывают, что по крайней мере для небольших p условие $p \equiv 1 \bmod 8$ существенно.)

Доказательство (по Тэйту). Рассмотрим произведение

$$N = \frac{p-1^2}{4} \cdot \frac{p-3^2}{4} \cdot \frac{p-5^2}{4} \cdot \dots \cdot \frac{p-m^2}{4}.$$

Здесь m должно быть наибольшим нечетным числом, не превосходящим $\sqrt{p}$, так что $m^2 < p < (m+2)^2$. Тогда для любого сомножителя $(p-i^2)/4$ этого произведения имеем неравенство

$$0 < \frac{p-i^2}{4} < \frac{(m+2)^2-i^2}{4} = \frac{m+2+i}{2} \cdot \frac{m+2-i}{2},$$

откуда

$$0 < N < (m+1)!$$

Предположим теперь, что p является квадратичным вычетом по модулю каждого простого числа, меньшего $\sqrt{p}$. Мы докажем, что тогда

$$N \equiv 0 \bmod (m+1)!,$$

что ведет к противоречию.

Обозначим символом $[\xi]$ наибольшее целое число $\leq \xi$.

Прежде всего, следуя Гауссу, заметим, что для доказательства сравнения $a_1 a_2 \dots a_k \equiv 0 \bmod n!$ достаточно проверить, что для каждой степени простого

числа $q^s \leq n$ по крайней мере $[n/q^s]$ сомножителей a_j делятся на q^s . Действительно, это видно из тождества $n! = \prod_{q^s \leq n} q^{[n/q^s]}$.

Таким образом, в нашем случае следует доказать, что для каждой степени простого числа $q^s \leq m+1$ по крайней мере $[(m+1)/q^s]$ из чисел $(p-i^2)/4$ делятся на q^s . Иными словами, нужно установить, что сравнение

$$p \equiv i^2 \pmod{4q^s}$$

имеет не меньше $[(m+1)/q^s]$ решений в интервале $0 < i < m+1$.

Прежде всего покажем, что p действительно является квадратичным вычетом по модулю $4q^s$. Так как $p \equiv 1 \pmod{8}$, известно, что p является квадратичным вычетом по модулю любой степени двойки. Значит, достаточно рассмотреть нечетные q , для которых заведомо $q^s \neq m+1$. Тогда

$$q \leq q^s \leq m < \sqrt{p},$$

так что p является квадратичным вычетом по модулю q , откуда легко следует, что p является вычетом и по модулю $4q^s$.

Стало быть, сравнение $p \equiv i^2 \pmod{4q^s}$ имеет по крайней мере одно решение i . Изменив в случае необходимости его знак и добавив некоторое кратное $2q^s$, мы получим решение i_0 , лежащее в интервале $0 < i_0 < q^s$. (Это можно делать, потому что $(i+2q^s)^2 \equiv i^2 \pmod{4q^s}$.) Аналогично можно получить решение $2q^s - i_0$, лежащее между q^s и $2q^s$, решение $i_0 + 2q^s$ между $2q^s$ и $3q^s$ и так далее. Значит, для каждого положительного числа n существует по крайней мере $[n/q^s]$ решений между 0 и n . Полагая $n = m+1$, получаем доказательство леммы 11.9. ■

Теперь доказательство квадратичного закона взаимности по Гауссу и Тэйтту можно завершить следующим образом. Предположим, что p — квадратичный невычет по модулю q , где $q < p$ и $p \equiv 1 \pmod{8}$. Рассуждая по индукции, можно считать, что $\varepsilon_q = 1$. Тогда $(p, q)_\infty = ((p, q))_2 = 1$, но $((p, q))_q = -1$. Отсюда следует, что

$((p, q))_{p^r}^{\varepsilon_p} = -1$ и, значит, $\varepsilon_p \neq 0$. Это завершает доказательство. ■

Замечание. Пусть $F(x)$ — поле рациональных функций

$$f = (a_0x^n + \dots + a_n)/(b_0x^m + \dots + b_m)$$

от одной переменной над F . Удобно положить

$$\deg f = n - m, \text{ ст. коэфф. } f = a_0/b_0.$$

Техника, использованная выше для вычисления K_2Q , применима также к группе $K_2F(x)$ и доставляет расщепимую точную последовательность

$$1 \rightarrow K_2F \rightarrow K_2F(x) \rightarrow \bigoplus (F[x]/p)^* \rightarrow 1.$$

В прямой сумме p пробегает все ненулевые простые идеалы в кольце многочленов (для доказательства того, что последовательность расщепляется, можно использовать символ $s(f, g) = \{\text{ст. коэфф. } f, \text{ ст. коэфф. } g\}$ со значениями в K_2F).

В точности как для поля рациональных чисел, в доказательстве используются символы $(f, g)_p$, связанные с различными p -адическими нормированиями на $F(x)$. И так же, как в поле рациональных чисел, бросается в глаза отсутствие одного нормирования в списке. Здесь это нормирование

$$v_\infty(f) = -\deg(f),$$

связанное с бесконечно удаленной точкой. Поэтому, в точности так же, как и выше, мы можем вывести формулу, которая выражает соответствующий символ Стейнберга

$$(f, g)_\infty = (-1)^{\deg f \deg g} (\text{ст. коэфф. } g)^{\deg f} / (\text{ст. коэфф. } f)^{\deg g}$$

через $(f, g)_p$. Формула, открытая А. Вейлем, имеет вид

$$(f, g)_\infty^{-1} = \prod \text{norm}(f, g)_p,$$

где произведение берется по всем ненулевым простым идеалам p , а норма относится к расширению $(F[x]/p)^*$ над F^* . (Ср. Басс Х., Алгебраическая K -теория, «Мир», 1973, гл. 6, § 8). Если f, g — взаимно простые

многочлены, то правую часть этого уравнения можно записать в виде

$$\prod_{\xi(\varepsilon)=0} f(\xi) / \prod_{f(\eta)=0} g(\eta),$$

где ξ и η пробегают алгебраическое замыкание поля F и нули считаются с их кратностями.

Несчетные поля

В заключение этого параграфа мы укажем еще одно приложение леммы 11.5.

ТЕОРЕМА 11.10. *Если поле F несчетно, то и группа K_2F несчетна.*

Доказательство. Пусть $\Pi \subset F$ — простое поле и $X = \{x_\alpha\}$ — некоторое максимальное множество алгебраически независимых над Π элементов. Таким образом, F — алгебраическое расширение несчетного функционального поля $\Pi(X)$. Выбрав одну переменную $x_0 \in X$ и положив $X' = X \setminus \{x_0\}$, мы получим дискретное нормирование на $\Pi(X)$ с полем классов вычетов $\Pi(X')$, отвечающее гомоморфизму $f(x_0) \mapsto f(0)$ кольца многочленов от x_0 с коэффициентами в $\Pi(X')$. Продолжим этот гомоморфизм до точки поля F со значениями в алгебраическом замыкании поля $\Pi(X')$. (Ср. Lang S., *Introduction to Algebraic Geometry*, N. Y. — London, 1968, стр. 8.) Тогда на каждом конечном расширении E поля $\Pi(X)$ в F индуцируется дискретное нормирование, поле классов вычетов которого $\bar{E}$ является конечным расширением поля $\Pi(X')$. Отобразим K_2E в $\bar{E}$ с помощью 11.5. Пусть E_1 — расширение поля E с индексом ветвления r . Нетрудно проверить, что следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{array}{ccc} K_2E & \rightarrow & K_2E_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bar{E} & \xrightarrow{r} & \bar{E}_1 \end{array}$$

где r означает гомоморфизм $e \mapsto e^r$. Чтобы сделать нижнюю стрелку вложением, профакторизуем по счетной

подгруппе всех корней из единицы в $\bar{E}$. Мы получим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} K_2E & \rightarrow & K_2E_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bar{E}/(\text{корни из } 1) & \rightarrow & \bar{E}_1/(\text{корни из } 1) \end{array}$$

в которой нижняя стрелка является уже вложением.

Переходя теперь к прямому пределу по конечным расширениям $\bar{E}$ поля $\Pi(X)$ в F , мы получим гомоморфизм из K_2F на некоторую предельную группу, содержащую $\bar{E}/(\text{корни из } 1)$ для всех таких E . Окончательно, группа K_2F несчетна. ■

§ 12. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ МАЦУМОТО

Пусть c — некоторый символ Стейнберга для поля F со значениями в мультипликативной абелевой группе A (ср. п. 11.3). Воспользуемся символом c для построения центрального расширения

$$1 \rightarrow A \rightarrow G \rightarrow SL(n, F) \rightarrow 1.$$

Здесь n может быть любым целым числом, но для простоты мы ограничимся случаем $n \geq 3$. Нужное нам расширение будет сначала построено над подгруппой D диагональных матриц, затем над большей группой M мономиальных матриц и, наконец, над всей группой $SL(n, F)$.

Чтобы построить первое расширение

$$1 \rightarrow A \rightarrow H \rightarrow D \rightarrow 1,$$

обозначим через H множество $D \times A$ со следующей операцией умножения. Если $d = \text{diag}(u_1, \dots, u_n)$ и $d' = \text{diag}(v_1, \dots, v_n)$, то

$$(d, a)(d', a') = \left(dd', aa' \prod_{i \geq j} c(u_i, v_j) \right).$$

Легко проверить, что это произведение ассоциативно и, следовательно, превращает H в группу. Обозначим через

$$\varphi: H \rightarrow D$$

ее проекцию на первый сомножитель. Это гомоморфизм с ядром $I \times A$, содержащимся в центре H . отождествим это ядро с A . Коммутаторы в H можно вычислять в точности, как в п. 8.3.

ЛЕММА 12.1. *Если $\varphi(h) = \text{diag}(u_1, \dots, u_n)$ и $\varphi(k) = \text{diag}(v_1, \dots, v_n)$, то $hkh^{-1}k^{-1}$ совпадает с произведением*

$$c(u_1, v_1) c(u_2, v_2) \dots c(u_n, v_n).$$

Доказательство. Легкое вычисление с использованием кососимметричности c и уравнения $u_1 \dots u_n = v_1 \dots v_n = 1$. ■

Теперь для данных целых чисел $i \neq j$ между 1 и n определим символы $h_{ij}(u) \in H$. Если $i < j$, обозначим через $h_{ij}(u)$ элемент $(d_{ij}(u), 1)$ в $D \times A = H$, где $d_{ij}(u)$ есть матрица

$$\text{diag}(1, \dots, 1, u, 1, \dots, 1, u^{-1}, 1, \dots, 1)$$

с элементом u на i -м месте и u^{-1} на j -м месте. Если же $i > j$, в качестве $h_{ij}(u)$ возьмем $(d_{ij}(u), c(u, u))$.

ЛЕММА 12.2. Символы $h_{ij}(u)$ удовлетворяют тождествам

$$h_{ji}(u) = h_{ij}(u)^{-1} = h_{ik}(u)^{-1} h_{kj}(u)^{-1}$$

и

$$h_{ij}(u) h_{ij}(v) = c(u, v) h_{ij}(uv),$$

как в § 9.

Доказательство получается непосредственно.

Теперь мы построим группу W , содержащую H и отображающуюся на группу M мономиальных матриц. В качестве первого шага построим подгруппу W_0 , порожденную некоторыми символами $w_{ij}(\pm 1)$. Разберем две возможности.

С л у ч а й 1. Если $c(-1, -1) = 1$, мы определим W_0 как группу M_0 , состоящую из мономиальных матриц в $SL(n, F)$, ненулевые элементы которых равны ± 1 . Определим элемент $w_{ij}(1) = w_{ji}(-1)$ как мономиальную матрицу с 1 на месте (i, j) , -1 на месте (j, i) и единицами, где можно, на диагонали; остальные ее элементы нулевые. Обозначим через $\varphi_0: W_0 \rightarrow M_0$ тождественное отображение.

С л у ч а й 2. Если $c(-1, -1) \neq 1$, то F должно быть полем характеристики нуль в силу 9.9. Значит, F содержит кольцо целых Z , и мы можем отождествить M_0 с группой всех мономиальных матриц в $SL(n, Z)$. Обозначим через W_0 прообраз группы M_0 в двукратном центральном расширении $\text{St}(n, Z) \rightarrow SL(n, Z)$. Тогда определены естественное отображение $\varphi_0: W_0 \rightarrow M_0$ и элементы $w_{ij}(\pm 1) \in W_0$, как в § 10.

ЗАМЕЧАНИЕ. Можно было бы действовать иначе, отождествив M_0 с некоторой подгруппой группы вращений,

$SO(n)$, а W_0 с соответствующей подгруппой ее двукратного накрытия $Spin(n)$.

Теперь мы определим действие группы W_0 на H . Так как действие элемента ω_0 будет зависеть только от $\varphi_0(\omega_0)$, займемся сначала мономиальными матрицами.

Для каждой перестановки π чисел $\{1, \dots, n\}$ обозначим через p_π соответствующую перестановочную матрицу. Любую мономиальную матрицу можно однозначно записать в виде произведения $p_\pi \operatorname{diag}(u_1, \dots, u_n)$ в $GL(n, F)$.

Лемма 12.3. *Каждая мономиальная матрица $m = p_\pi \operatorname{diag}(u_1, \dots, u_n)$ определяет единственный автоморфизм $\alpha(m)$ группы H , который тождественно действует на A и переводит каждый элемент $h_{ij}(v)$ в элемент $c(u_i u_j^{-1}, v) h_{\pi(ij)}(v)$. Этот автоморфизм $\alpha(m)$ мультипликативен по m , и совпадает с внутренним автоморфизмом $h \mapsto h_1 h h_1^{-1}$ в случае, когда $m = \varphi(h_1)$ — диагональная матрица.*

Доказательство. Если $u_1 \dots u_n = +1$, из 12.1 видно, что соответствие

$$h_{ij}(v) \mapsto c(u_i u_j^{-1}, v) h_{ij}(v)$$

определяет внутренний автоморфизм H . Если $u_1 \dots u_n = -1$, то это соответствие продолжается до некоторого внутреннего автоморфизма большей группы $H(n+1)$, связанной с $SL(n+1, F)$. Значит, и в этом случае оно определяет автоморфизм H . Временно обозначим его символом $\beta(u_1, \dots, u_n)$.

Для любой перестановки π чисел $\{1, \dots, n\}$ соответствие $h_{ij}(v) \mapsto h_{\pi(ij)}(v)$ сохраняет все соотношения из 12.2 между элементами $h_{ij}(v)$ и формулу для коммутатора 12.1. Следовательно, оно определяет некоторый автоморфизм H , тривиальный на A . Обозначим его через β_π и положим $\alpha(m) = \beta_\pi \beta(u_1, \dots, u_n)$.

Теперь доказательство без труда завершается с помощью соотношения

$$\beta(u_1, \dots, u_n) \beta_\pi = \beta_\pi \beta(u_{\pi(1)}, \dots, u_{\pi(n)}). \quad \blacksquare$$

В частном случае $m = \varphi_0(\omega_0)$ мы будем обозначать этот автоморфизм $\alpha(m)$ так: $h \mapsto \omega_0 h \omega_0^{-1}$.

Чтобы построить группу W , порожденную H и W_0 , нам нужно описать пересечение $H \cap W_0$. Обозначим через $H_0 \subset H$ подгруппу, порожденную символами h_{ij} (-1). Ее можно отождествить с подгруппой W_0 , порожденной соответствующими символами d_{ij} (-1) в случае $W_0 \cong M_0$ или символами h_{ij} (-1) в случае $W_0 \subset \text{St}(n, Z)$.

Определение W . Обозначим через W факторпространство $H \times W_0$, которое получается после отождествления (hh_0, w_0) с $(h, h_0 w_0)$ для всех $h_0 \in H_0$. Определим умножение в W формулой

$$(h, w_0) (h', w'_0) = (h (w_0 h' w_0^{-1}), w_0 w'_0),$$

в которой используется действие W_0 на H , описанное в лемме 12.3.

Лемма 12.4. *Это умножение совместимо с отождествлениями и превращает множество W в группу. Отображение $\varphi: W \rightarrow M$, $\varphi(h, w_0) = \varphi(h) \varphi_0(w_0)$, превращает W в центральное расширение группы M с ядром, изоморфным A .*

Доказательство получается непосредственно.

Мы будем отождествлять группы $A \subset H$ и W_0 с их изоморфными образами в W . Заметим, что $H \cap W_0 = H_0$.

Чтобы эффективно работать с этой группой W , нам понадобится явное описание ее внутренних автоморфизмов.

Лемма 12.5. *Пусть $\varphi(w) = p_\pi \text{diag}(u_1, \dots, u_n)$. Тогда*

$$w h_{ij}(v) w^{-1} = c(u_i u_j^{-1}, v) h_{\pi(ij)}(v)$$

и

$$w w_{ij}(1) w^{-1} = h_{\pi(ij)}(u_i u_j^{-1}) w_{\pi(ij)}(1).$$

Доказательство. Мы уже знаем, как вычислять $w h_{ij}(v) w^{-1}$ в том частном случае, когда w принадлежит либо W_0 , либо H . Так как группа W порождена W_0 и H , нетрудно проверить первую формулу для всех w .

Теперь вычислим результат сопряжения $w_{ij}(1)$ элементом h , для которого $\varphi(h) = \text{diag}(u_1, \dots, u_n)$. Представим h в виде произведения

$$h = h_{ir}(u_i) h_{jr}(u_j) h'$$

для некоторого r , в котором h' коммутирует с $w_{ij}(1)$, и заметим, что

$$w_{ij}(1) h w_{ij}(-1) = h_{jr}(u_i) c(-1, u_i) h_{ir}(u_j) h'.$$

Следовательно, коммутатор $[h, w_{ij}(1)]$ равен

$$h_{ir}(u_i) h_{jr}(u_j) h_{ir}(u_j)^{-1} c(-1, u_i) h_{jr}(u_i)^{-1}.$$

С помощью лемм 12.1 и 12.2 при некотором терпении можно преобразовать это выражение в $h_{ij}(u_i u_j^{-1})$. Значит, $h w_{ij}(1) h^{-1} = h_{ij}(u_i u_j^{-1}) w_{ij}(1)$, как и утверждалось. Так как мы можем вычислить результат сопряжения $w_{ij}(1)$ посредством элемента из W_0 с помощью 9.4, доказательство завершается без труда. ■

Чтобы перейти от подгруппы M мономиальных матриц к полной группе $SL(n, F)$, мы используем некоторый вариант нормальной формы Брюа для матрицы (ср. п. 9.15). Пусть T — группа верхних треугольных матриц с нулями ниже диагонали и единицами на диагонали.

Лемма 12.6. Любую матрицу s из $SL(n, F)$ можно записать в виде произведения tmt' , где $t, t' \in T$ и $m \in M$. Хотя t и t' могут меняться, мономиальная матрица m однозначно определяется по s . Таким образом, существует корректно определенная ретракция $\rho: SL(n, F) \rightarrow M$, $\rho(tmt') = m$.

(Разумеется, ρ не является гомоморфизмом.)

Доказательство 12.6. Первое утверждение немедленно следует из 9.15 или может быть доказано независимо с помощью подходящих элементарных операций над строками и столбцами.

Для доказательства второго предположим, что

$$t_1 m t_2 = t_3 m' t_4.$$

Умножая на t_3^{-1} слева и на t_2^{-1} справа, находим

$$tm = m't'$$

для подходящих t, t' .

Пусть $(e_1, \dots, e_n)$ — такой базис, что $te_i = a_i e_{\mu(i)}$, $m'e_i = a'_i e_{\mu'(i)}$, где μ и μ' — перестановки. Будем доказывать индукцией вниз по k , что $\mu(k) = \mu'(k)$, $a_k = a'_k$.

Имеем $t'(e_n) = e_n$; поэтому $m't'e_n = a'_n e_{\mu'(n)}$. Но $tm(e_n) = t(a_n e_{\mu(n)}) = a_n e_{\mu'(n)} + \sum_{i \geq \mu(n)+1} a_n b_{ni} e_i$. Так как $a_n \neq 0$, обязательно $a_n = a'_n$, $\mu(n) = \mu'(n)$ и $b_{ni} = 0$ для $i \geq \mu(n) + 1$.

Аналогично делается индуктивный переход. Мы считаем, что $\mu(l) = \mu'(l)$ для всех $l \geq k+1$. Тогда

$$m't'(e_k) = m' \left(e_k + \sum_{l \geq k+1} b'_{kl} e_l \right) = a'_k e_{\mu'(k)} + \sum_{l \geq k+1} b'_{kl} a'_l e_{\mu(l)},$$

$$tm(e_k) = a_k t(e_{\mu(k)}) = a_k e_{\mu(k)} + \sum_{l \geq \mu(k)+1} a_k b_{kl} e_l.$$

Так как $\mu(k)$ не равно $\mu(l)$ ни для какого $l \geq k+1$, совпадение возможно лишь при $\mu(k) = \mu'(k)$, $a_k = a'_k$.¹⁾ ■

Чтобы упростить обозначения, удобно будет обозначать пару последовательных индексов $(i, i+1)$ одной буквой α . Обращенную пару $(i+1, i)$ мы будем обозначать $-\alpha$. Таким образом, $d_\alpha(u)$ обозначает диагональную матрицу с элементом u на i -м месте, u^{-1} на $(i+1)$ -м месте и единицами на диагонали в остальных местах. Аналогично $m_\alpha(u)$ означает мономиальную матрицу с элементом u на α -м месте, $-u^{-1}$ на $(-\alpha)$ -м месте и 1 на диагонали в остальных местах.

Хотя функция $\rho: SL(n, F) \rightarrow M$ не является гомоморфизмом, заметим, что она удовлетворяет соотношениям

$$\rho(ds) = d\rho(s), \quad \rho(sd) = \rho(s)d$$

для любой диагональной матрицы d в $SL(n, F)$. Следующие свойства ρ будут особенно важны для нас.

¹⁾ Рассуждение в оригинале некорректно и было изменено при переводе. — Прим. перев.

ЛЕММА 12.7. Для любого элемента s из $SL(n, F)$ выражение $\rho(m_\alpha(1)s)$ совпадает либо с $m_\alpha(1)\rho(s)$, либо с $d_\alpha(u)^{-1}\rho(s)$ для некоторого однозначно определенного элемента u из F . Аналогично $\rho(sm_\beta(-1))$ совпадает либо с $\rho(s)m_\beta(-1)$, либо с $\rho(s)d_\beta(v)$ для некоторого v .

Замечание. Мы постарались написать эти формулы в таком виде, чтобы они остались справедливыми в группе Стейнберга, если заменить в них m_α на w_α и d_α на h_α .

Доказательство 12.7. (Ср. п. 9.15.) В выражении $s = tmt'$ мы можем однозначно представить t' в виде произведения $e_\beta^v t_\beta$, где e_β^v означает элементарную матрицу с элементом v на месте β , а t_β означает любую матрицу из T с нулем на месте β . Тогда

$$(1) \quad sm_\beta(-1) = tme_\beta^v m_\beta(-1) t'_\beta$$

для некоторой матрицы t'_β . Если $v = 0$, это уже показывает, что

$$\rho(sm_\beta(-1)) = \rho(s)m_\beta(-1).$$

Предположим теперь, что $v \neq 0$. Пусть π — перестановка, связанная с мономиальной матрицей m , и пусть $\beta = (j, j+1)$. Если $\pi(j) < \pi(j+1)$, так что элемент $te_\beta^v m^{-1}$ также принадлежит T , то мы можем в уравнении (1) сдвинуть множитель e_β^v влево и снова заключить, что $\rho(sm_\beta(-1)) = \rho(s)m_\beta(-1)$.

Если же $\pi(j) > \pi(j+1)$, подставим в (1) тождество

$$e_\beta^v = e_{-\beta}^{v^{-1}} e_\beta^{-v} m_\beta(v)$$

и передвинем множитель $e_{-\beta}^{v^{-1}}$ налево, а множитель e_β^{-v} направо. Мы получим

$$sm_\beta(-1) = t'' m m_\beta(v) m_\beta(-1) t'''.$$

Так как $m_\beta(v) m_\beta(-1) = d_\beta(v)$, это доказывает, что $\rho(sm_\beta(-1)) = \rho(s)d_\beta(v)$ в этом случае.

Аналогично вычисляется $\rho(m_\alpha(1)s)$. Положим $s = t_\alpha e_\alpha^{-u} m t'$, так что

$$m_\alpha(1)s = t'_\alpha m_\alpha(1) e_\alpha^{-u} m t'.$$

Тогда в случае $\pi^{-1}(i) < \pi^{-1}(i+1)$ мы можем передвинуть множитель e_{α}^{-u} направо и заключить, что $\rho(m_{\alpha}(1)s) = m_{\alpha}(1)\rho(s)$. С другой стороны, если $u \neq 0$ и $\pi^{-1}(i) > \pi^{-1}(i+1)$, то, подставив $e_{\alpha}^{-u} = m_{\alpha}(-u)e_{\alpha}^ue_{-\alpha}^{-u^{-1}}$ и передвинув две элементарные матрицы соответственно налево и направо, мы получим

$$m_{\alpha}(1)s = t''m_{\alpha}(1)m_{\alpha}(-u)mt''''.$$

Так как $m_{\alpha}(1)m_{\alpha}(-u) = d_{\alpha}(u)^{-1}$, это завершает доказательство леммы 12.7. ■

Замечание. Для дальнейших нужд нам будут полезны приведенные выше уравнения в несколько более явном виде. Поставим в соответствие каждой мономиальной матрице m и каждой паре индексов β элемент поля $f(\beta, m)$, определенный уравнением

$$me_{\beta}^xm^{-1} = e_{\pi(\beta)}^{f(\beta, m)x}.$$

Тогда если $\varphi(\omega) = m$, то $\omega h_{\beta}(v)\omega^{-1} = c(f(\beta, m), v)h_{\pi(\beta)}(v)$. (Ср. п. 9.4, 12.5.) Заметим, что $f(-\beta, m) = f(\beta, m)^{-1}$.

Если теперь $s = tme_{\beta}^vt_{\beta}$ и $v \neq 0$, то либо

$$(2) \quad sm_{\beta}(-1) = te_{\pi(\beta)}^{f(\beta, m)v}mm_{\beta}(-1)t'',$$

либо же

$$(3) \quad sm_{\beta}(-1) = te_{\pi(-\beta)}^{f(-\beta, m)v^{-1}}md_{\beta}(v)t''.$$

Это и есть одно из нужных соотношений. Аналогично если $s = t_{\alpha}e_{\alpha}^{-u}mt$ с $u \neq 0$ и если $\alpha = \pi(\gamma)$, то либо

$$(4) \quad m_{\alpha}(1)s = t'm_{\alpha}(1)me_{\gamma}^{-uf(\gamma, m)^{-1}}t,$$

либо

$$(5) \quad m_{\alpha}(1)s = t'd_{\alpha}(u)^{-1}me_{-\gamma}^{-f(\gamma, m)u^{-1}}t.$$

Это второе соотношение.

Теперь мы в состоянии описать остроумную конструкцию центрального расширения группы $SL(n, F)$ по Мацумото. Обозначим через

$$X \subset SL(n, F) \times W$$

множество всех пар (s, w) , удовлетворяющих условию

$$\rho(s) = \varphi(w).$$

Так как нет никакого очевидного способа превратить это множество в группу, мы поступим иначе. Пусть G — группа перестановок множества X , порожденная перестановками $\lambda(h)$, $\mu(t)$ и η_α , которые определены следующим образом.

Для каждого элемента $h \in H$ обозначим через $\lambda(h)$ перестановку

$$\lambda(h)(s, w) = (\varphi(h)s, hw)$$

множества X . Ясно, что это отображение сохраняет тождество $\rho(s) = \varphi(w)$ и что λ вкладывает группу H в группу всех перестановок множества X .

Для каждого элемента $t \in T$ обозначим через $\mu(t)$ перестановку

$$\mu(t)(s, w) = (ts, w).$$

Очевидно, μ вкладывает T в группу перестановок X .

Наконец, для каждой пары $\alpha = (i, i+1)$ обозначим через η_α перестановку, которая переводит пару (s, w) либо в пару $(m_\alpha(1)s, w_\alpha(1)w)$, либо в пару $(m_\alpha(1)s, h_\alpha(u)^{-1}w)$ в соответствии с тем, равен $\rho(m_\alpha(1)s)$ элементу $m_\alpha(1)\rho(s)$ или же $d_\alpha(u)^{-1}\rho(s)$. Ясно, что это определение построено так, чтобы сохранялось условие $\rho(s) = \varphi(w)$. Нетрудно проверить, что

$$\eta_\alpha \eta_\alpha = \lambda(h_{-\alpha}(-1)),$$

откуда следует, что η_α — перестановка. (Здесь используется тождество $c(u, -u) = 1$.)

Все эти перестановки $\lambda(h)$, $\mu(t)$ и η_α порождают некоторую подгруппу G группы всех перестановок множества X . Ключевая лемма такова:

Лемма 12.8. *Группа G просто транзитивна на X .*

Иными словами, для любых двух пар (s, w) и (s', w') в G существует единственный элемент g , такой, что $g(s, w) = (s', w')$.

Доказательство транзитивности проводится довольно легко. Как в доказательстве 9.15, заметим, что $SL(n, F)$

порождена группой T и элементом $m_\alpha(1)$. Поэтому, действуя на (s, ω) некоторой последовательностью перестановок $\mu(t)$ и η_α , мы можем перевести первую компоненту s в s' . Иными словами, можно найти такой элемент $g_0 \in G$, что $g_0(s, \omega) = (s', \omega^*)$. Так как обе пары (s', ω') и (s', ω^*) принадлежат X , мы заключаем, что $\omega' \equiv \omega^*$ по модулю подгруппы A группы W . Поэтому, действуя на (s', ω^*) подходящим отображением $\lambda(a)$, мы приходим к (s', ω') .

Это приводит к доказательству существования g с условием $g(s, \omega) = (s', \omega')$. Доказательство единственности труднее, и мы дадим его позже.

Временно приняв лемму 12.8, мы без труда приходим к следующему результату:

ТЕОРЕМА 12.9. *Группа G является центральным расширением группы $SL(n, F)$ с ядром $\lambda(A) \cong A$.*

Доказательство. Заметим сначала, что действие любого элемента группы G на первой компоненте любой пары $(s, \omega) \in X$ является просто умножением слева на некоторый элемент $\Psi(g) \in SL(n, F)$. Этот факт верен для образующих группы G и тем самым для всех ее элементов. Это определяет некоторый гомоморфизм $\Psi: G \rightarrow SL(n, F)$. Так как G транзитивно действует на X , отсюда следует, что Ψ сюръективен.

Ядро Ψ можно вычислить так. Если $\Psi(g) = 1$, то элемент $g(s, \omega)$ должен быть парой (s, ω') . Уравнение $\rho(s) = \varphi(\omega) = \varphi(\omega')$ показывает, что $\omega' = a\omega$ для некоторого элемента $a \in A$. Таким образом,

$$g(s, \omega) = \lambda(a)(s, \omega).$$

Так как действие G просто транзитивно, отсюда следует, что $g = \lambda(a)$. Поэтому последовательность

$$1 \rightarrow A \xrightarrow{\lambda} G \xrightarrow{\Psi} SL(n, F) \rightarrow 1$$

точна.

Проверяется, что каждая перестановка $\lambda(a)$ коммутирует с образующими группы G . Это завершает вывод теоремы 12.9 из леммы 12.8.

Для завершения доказательства, однако, мы должны проверить лемму. Эта проверка основана на следующей

конструкции. Пусть G^* — группа перестановок, действующая справа на множестве X , которая порождена некоторыми перестановками $\lambda^*(h)$, $\mu^*(t)$, η_β^* , определенными ниже.

Для каждого элемента $h \in H$ положим

$$(s, w) \lambda^*(h) = (s\varphi(h), wh).$$

Для каждого элемента $t \in T$ положим

$$(s, w) \mu^*(t) = (st, w).$$

Наконец, для каждой пары $\beta = (j, j+1)$ определим $(s, w) \eta_\beta^*$ как $(sm_\beta(-1), ww_\beta(-1))$ или $(sm_\beta(-1), wh_\beta(v))$ в зависимости от совпадения $\rho(sm_\beta(-1))$ с $\rho(s)m_\beta(-1)$ или $\rho(s)d_\beta(v)$ (ср. п. 12.7). Очевидно, перестановки $\lambda^*(h)$, $\mu^*(t)$ и η_β^* порождают транзитивную группу G^* перестановок, действующую справа на множестве X .

Лемма 12.10. *Каждый элемент группы G коммутирует с каждым элементом группы G^* .*

Иными словами, «ассоциативный закон»

$$(gx) g^* = g (xg^*)$$

имеет место для всех $g \in G$, $x \in X$ и $g^* \in G^*$. Чтобы доказать это, очевидно, достаточно рассмотреть частный случай, в котором g — одна из образующих G , а g^* — одна из образующих G^* .

Если g имеет вид $\lambda(h)$ или $\mu(t)$ или если g^* имеет вид $\lambda^*(h)$ или $\mu^*(t)$, ассоциативность проверяется без затруднений. Поэтому мы сосредоточим внимание на случаях $g = \eta_\alpha$ и $g^* = \eta_\beta^*$.

Заметим, что первая компонента пары $\eta_\alpha(s, w) \eta_\beta^*$ при любом размещении скобок, очевидно, равна $m_\alpha(1) sm_\beta(-1)$. Поэтому мы можем заниматься только второй ее компонентой.

Положим $x = (s, w)$, пусть $s = t_\alpha e_\alpha^{-u} m e_\beta^v t'_\beta$ и обозначим через π перестановку, ассоциированную с мономиальной матрицей $m = \varphi(w)$.

Случай 1. Если $\pi(\beta) \neq \pm \alpha$, то вторая компонента пары $\eta_\alpha(s, w) \eta_\beta^*$ равна либо

$$w_\alpha(1) ww_\beta(-1) \text{ или } h_\alpha(u)^{-1} ww_\beta(-1),$$

если $v = 0$ или $\pi(j) < \pi(j+1)$, либо

$$\omega_\alpha(1) \omega h_\beta(v) \text{ или } h_\alpha(u)^{-1} \omega h_\beta(v),$$

если $v \neq 0$ и $\pi(j) > \pi(j+1)$. При всех возможностях результат не зависит от расстановки скобок.

С л у ч а й 2. Если $\pi(\beta) = \alpha$, из уравнения (2) следует, что вторая компонента пары $\eta_\alpha(x\eta_\beta^*)$ равна

$$(6) \quad h_\alpha(u - f(\beta, m)v)^{-1} \omega \omega_\beta(-1)$$

при условии, что $u \neq f(\beta, m)v$. С другой стороны, пользуясь (4), получаем, что вторая компонента пары $(\eta_\alpha x) \eta_\beta^*$ равна

$$(7) \quad \omega_\alpha(1) \omega h_\beta(v - f(\beta, m)^{-1}u),$$

если $u \neq f(\beta, m)v$. Проверку равенства (6) = (7) в группе W мы оставляем неустрашимому читателю.

Если $u = f(\beta, m)v$, то вторая компонента пары $\eta_\alpha x \eta_\beta^*$ равна $\omega_\alpha(1) \omega \omega_\beta(-1)$ при любой расстановке скобок.

С л у ч а й 3. Предположим, что $\pi(\beta) = -\alpha$. Пользуясь уравнением (3), находим, что вторая компонента пары $\eta_\alpha(x\eta_\beta^*)$ равна

$$(8) \quad h_\alpha(u - f(-\beta, m)v^{-1})^{-1} \omega h_\beta(v)$$

при условии, что $uv \neq f(-\beta, m)$ и $v \neq 0$. Аналогично, пользуясь (5), находим, что вторая компонента пары $(\eta_\alpha x) \eta_\beta^*$ равна

$$(9) \quad h_\alpha(u)^{-1} \omega h_\beta(v - f(-\beta, m)u^{-1})$$

при условии, что $u \neq 0$ и $uv \neq f(-\beta, m)$. Чтобы проверить равенство (8) = (9), передвинем сомножитель ω в обоих выражениях направо с помощью 12.5, затем заменим h_α^{-1} на $h_{-\alpha}$ в первом множителе каждого выражения. Положив $f = f(-\beta, m)$, мы получаем, что достаточно проверить равенство

$$\begin{aligned} & h_{-\alpha}(u - f/v) h_{-\alpha}(v) c(f^{-1}, v) = \\ & = h_{-\alpha}(u) h_{-\alpha}(v - f/u) c(f^{-1}, v - f/u) \end{aligned}$$

или, иначе,

$$c(u - f/v, v) c(f^{-1}, v) = c(u, v - f/u) c(f^{-1}, v - f/u).$$

Подставим сюда $z = f/uv$ и сократим сомножители $c(u, v)$ и $c(f^{-1}, v)$ из левой и правой частей. Дело сведется к проверке

$$c(1 - z, v) = c(u, 1 - z) c(f^{-1}, 1 - z).$$

Но это равенство легко выводится из $c(z, 1 - z) = 1$.

Замечание. Это единственное место во всем доказательстве, где уравнение $c(z, 1 - z) = 1$ используется в полную силу.

Остается посмотреть, что происходит в случаях $u = 0$ или $v = 0$, или $uv = f(-\beta, m)$. Чтобы разобраться с ними, мы должны проверить равенства

$$h_\alpha(-f(-\beta, m) v^{-1})^{-1} \omega h_\beta(v) = \omega_\alpha(1) \omega \omega_\beta(-1)$$

или

$$\omega_\alpha(1) \omega \omega_\beta(-1) = h_\alpha(u)^{-1} \omega h_\beta(-f(-\beta, m) u^{-1}),$$

или

$$\omega_\alpha(1) \omega h_\beta(v) = h_\alpha(u)^{-1} \omega \omega_\beta(-1)$$

соответственно. Доказательства хотя и кропотливы, но не содержат никаких особенных трудностей. Это завершает доказательство 12.10. ■

Доказательство того, что действие G на X просто транзитивно (лемма 12.8). Если $g_1 x = g_2 x$, то

$$g_1(xg^*) = g_2(xg^*)$$

для всех g^* в G^* . Но G^* действует транзитивно и, значит, это доказывает, что $g_1 x' = g_2 x'$ для всех x' в X . Поэтому $g_1 = g_2$, что доказывает 12.8 и завершает доказательство 12.9. ■

Теперь мы готовы доказать теорему Мацумото 11.1. Рассмотрим универсальный символ Стейнберга $c: F^\times \times F^\times \rightarrow A$ для поля F . Иными словами, пусть A — абелева группа, заданная образующими $c(u, v)$, которые подчинены только соотношениям

$$c(u_1 u_2, v) = c(u_1, v) c(u_2, v), \quad c(u, v_1 v_2) = c(u, v_1) c(u, v_2), \\ c(u, 1 - u) = 1$$

и их следствиям.

Пусть $\{u, v\} \in K_2F$ — символ, определенный § 8 и 9. Так как он бимультимпликативен и удовлетворяет уравнению $\{u, 1 - u\} = 1$, существует единственный гомоморфизм

$$\eta: A \rightarrow K_2F,$$

переводящий $c(u, v)$ в $\{u, v\}$ для всех u и v из F . Мы должны доказать, что это изоморфизм.

Обозначим через $1 \rightarrow A \rightarrow G_n \rightarrow SL(n, F) \rightarrow 1$ центральное расширение, о котором шла речь в теореме 12.9. Нетрудно перейти к прямому пределу при $n \rightarrow \infty$, получив центральное расширение

$$1 \rightarrow A \rightarrow G \rightarrow SL(F) \rightarrow 1.$$

Но, согласно п. 5.10, расширение

$$1 \rightarrow K_2F \rightarrow \text{St}(F) \rightarrow SL(F) \rightarrow 1$$

является универсальным центральным расширением группы $SL(F)$. Поэтому существует единственный гомоморфизм

$$\xi: \text{St}(F) \rightarrow G$$

над тождественным отображением группы $SL(F)$. Очевидно, ξ отображает K_2F в A . Сравнивая п. 8.3 с п. 12.1 и вспоминая, что $H \cong \lambda(H) \subset G$, мы видим, что ξ переводит $\{u, v\}$ в $c(u, v)$ для всех u и v . Но η переводит $c(u, v)$ в $\{u, v\}$ для всех u, v . Так как группа K_2F порождена символами $\{u, v\}$, а группа A порождена символами $c(u, v)$, это завершает доказательство того, что $K_2F \cong A$. ■

§ 13. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ДЕДЕКИНДОВЫХ КОЛЬЦАХ

Пусть Λ — дедекиндово кольцо с полем частных F . Мы докажем следующий результат:

ТЕОРЕМА 13.1 (Басс, Тэйт). *Существует точная последовательность*

$$K_2F \rightarrow \bigoplus K_1\Lambda/\mathfrak{p} \rightarrow K_1\Lambda \rightarrow K_1F \rightarrow \bigoplus K_0\Lambda/\mathfrak{p} \rightarrow \\ \rightarrow K_0\Lambda \rightarrow K_0F \rightarrow 0,$$

где обе прямые суммы распространены на все ненулевые простые идеалы $\mathfrak{p}$ кольца Λ .

Ср. Басс Х., Алгебраическая K -теория, стр. 533. Мы приведем здесь большую часть доказательства, но один ключевой шаг будет зависеть от ссылки на Басса.

ЗАМЕЧАНИЕ. Конечно, существует естественный гомоморфизм $K_2\Lambda \rightarrow K_2F$. Если множество идеалов кольца Λ счетно, то, как недавно показал Басс, дополненная последовательность $K_2\Lambda \rightarrow K_2F \rightarrow \bigoplus K_1\Lambda/\mathfrak{p}$ также точна. Хотелось бы продолжить ее еще дальше влево. Например, если F — числовое поле, так что $K_2\Lambda/\mathfrak{p} = 0$, можно предположить, что $K_2\Lambda$ вкладывается в K_2F . Но до сих пор это известно только в частном случае $\Lambda = \mathbb{Z}$ (ср. п. 10.2 и п. 8.4). Для общего дедекиндова кольца никто не сумел предложить подходящего гомоморфизма $\bigoplus K_2\Lambda/\mathfrak{p} \rightarrow K_2\Lambda$.

Начнем доказательство теоремы 13.1 с определения гомоморфизма

$$K_0\Lambda/\mathfrak{p} \rightarrow K_0\Lambda.$$

Он отображает стандартную образующую $[\Lambda/\mathfrak{p}]$ в разность $[\Lambda^1] - [\mathfrak{p}] \in \tilde{K}_0\Lambda$. Пусть, далее,

$$K_1F \cong F^\bullet \rightarrow K_0\Lambda/\mathfrak{p}$$

— гомоморфизм, который переводит ненулевой элемент поля x в сумму

$$\sum v_{\mathfrak{p}}(x) [\Lambda/\mathfrak{p}].$$

Здесь v_p обозначает p -адическое нормирование поля F , а $[\Lambda/p]$ — стандартная образующая (единичный элемент) в $K_0\Lambda/p$. Точность последовательности

$$K_1\Lambda \rightarrow K_1F \rightarrow \bigoplus K_0\Lambda/p \rightarrow K_0\Lambda \rightarrow K_0F \rightarrow 0$$

проверяется без труда.

(Замечание. Группу $\bigoplus K_0\Lambda/p$ можно, конечно, отождествить с группой «дивизоров» кольца Λ ; она же канонически изоморфна группе дробных идеалов Λ .)

Чтобы определить гомоморфизм

$$K_1\Lambda/p \rightarrow K_1\Lambda,$$

мы применим одну конструкцию Менникке. Пусть a, b — взаимно простые элементы кольца Λ ,

$$a\Lambda + b\Lambda = \Lambda.$$

Тогда существуют такие элементы c и d , что $ad - bc = 1$. Рассмотрим матрицу

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \Lambda) \subset GL(\Lambda).$$

По модулю нормальной подгруппы $E(\Lambda)$ эта матрица зависит только от a и b , так как если $ad' - bc' = 1$, то вычисление показывает, что

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c' & d' \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}$$

для подходящего x , откуда

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ c' & d' \end{pmatrix} \pmod{E(\Lambda)}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Символом Менникке $\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}$ называется элемент подгруппы $SL(\Lambda)/E(\Lambda) \subset K_1\Lambda$, который представлен унимодулярной матрицей $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

ЛЕММА 13.2. Символ $\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} \in K_1\Lambda$, определенный для взаимно простых a и b , симметричен, бимультимпликативен.

вен и не меняется, если к b прибавить элемент, делящийся на a , или к a прибавить элемент, делящийся на b .

Здесь мы рассматриваем $K_1\Lambda$ как мультипликативную группу.

Доказательство. Свойства

$$\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b + \lambda a \\ a \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ a + \lambda b \end{bmatrix}$$

ясны, потому что элементарные операции над столбцами матрицы отвечают умножению справа на элементарные матрицы. Отсюда следует, что

$$(1) \quad \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ a + b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a \\ a + b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a \\ b \end{bmatrix}.$$

Кроме того, если u — единица Λ , то

$$(2) \quad \begin{bmatrix} u \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \in K_1\Lambda,$$

потому что символ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, очевидно, отвечает единичной матрице.

Чтобы доказать, что

$$(3) \quad \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b' \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} bb' \\ a \end{bmatrix},$$

мы должны проверить сравнение

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a & bb' \\ * & * \end{pmatrix} \pmod{E(\Lambda)}.$$

Оно следует из матричного тождества

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b' & 0 \\ c' & d' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} a & bb' & 0 \\ * & * & * \\ * & * & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a & bb' & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{E(\Lambda)}, \end{aligned}$$

потому что, как легко проверяется, первая, третья и пятая матрицы в пятикратном произведении лежат в $E(\Lambda)$.

Комбинируя теперь (1), (2) и (3), получаем

$$(4) \quad \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

Так как бимультимпликативность следует из (3) и (4), это доказывает лемму 13.2. ■

Рассмотрим теперь ненулевой идеал $\mathfrak{a} \subset \Lambda$ и элемент кольца b , взаимно простой с $\mathfrak{a}$.

ЛЕММА 13.3. *Существует единственный бимультимпликативный символ*

$$\begin{bmatrix} b \\ \mathfrak{a} \end{bmatrix} \in SL(\Lambda)/E(\Lambda),$$

который определен для всех пар, состоящих из элемента b и ненулевого идеала $\mathfrak{a}$, взаимно простых между собой, со следующими свойствами. Он зависит только от класса вычетов $b \bmod \mathfrak{a}$ и совпадает с символом Менникке $\begin{bmatrix} b \\ \mathfrak{a} \end{bmatrix}$ в случае, когда $\mathfrak{a}$ — главный идеал, порожденный элементом a .

Доказательство. (Ср. Басс Х., Алгебраическая К-теория, стр. 249.) Для любого ненулевого идеала $\mathfrak{a}$ можно выбрать взаимно простой с ним идеал $\mathfrak{r}$ в классе $\{\mathfrak{a}\}^{-1}$ (ср. п. 1.8). Тогда произведение $\mathfrak{a}\mathfrak{r}$ является главным идеалом; пусть c — его образующая. По китайской теореме об остатках существует такой элемент b' кольца Λ , что

$$b' = b \bmod \mathfrak{a}, \quad b' \equiv 1 \bmod \mathfrak{r}.$$

Предположим теперь, что задан символ $\begin{bmatrix} b \\ \mathfrak{a} \end{bmatrix}$, удовлетворяющий описанным условиям. Тогда $\begin{bmatrix} b \\ \mathfrak{a} \end{bmatrix}$ должен быть равен

$$\begin{bmatrix} b \\ \mathfrak{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathfrak{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b' \\ \mathfrak{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b' \\ \mathfrak{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b' \\ \mathfrak{a}\mathfrak{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b' \\ c \end{bmatrix}.$$

Это доказывает единственность.

Чтобы установить существование, положим $\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}$ равным по определению $\begin{bmatrix} b' \\ c \end{bmatrix} \in SK_1\Lambda$, где элементы b' и c были определены выше. Определение не зависит от выбора b' , потому что если b'' также удовлетворяет условиям

$$b'' \equiv b \pmod{a}, \quad b'' \equiv 1 \pmod{r},$$

то $b'' \equiv b' \pmod{c}$, откуда $\begin{bmatrix} b'' \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b' \\ c \end{bmatrix}$. Далее это определение не зависит от выбора c . Действительно, если uc — другая образующая идеала ar , то $\begin{bmatrix} b' \\ uc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b' \\ c \end{bmatrix}$ в силу (2) (см. выше). Наконец, определение не зависит от выбора r . Действительно, если r' — другой идеал, взаимно простой с a , и $ar' = \Lambda c'$, то выбрав идеал u из того же класса, что и a , но взаимно простой с ним, мы получим

$$ru = \Lambda d, \quad r'u = \Lambda d'$$

для некоторых элементов d и d' . Заметим, что отношение $(cd')/(c'd)$ является единицей в Λ , потому что cd' и $c'd$ порождают один и тот же идеал $arr'u$. Выбрав теперь b' так, чтобы

$$b' \equiv b \pmod{a}, \quad b' \equiv 1 \pmod{rr'u},$$

мы получим $b' \equiv 1 \pmod{d}$ и $b' \equiv 1 \pmod{d'}$, так что

$$\begin{bmatrix} b' \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b' \\ cd' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b' \\ c'd \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b' \\ c' \end{bmatrix},$$

а это и требовалось.

Теперь нетрудно поверить, что символ $\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}$ бимультпликативен, зависит только от класса вычетов $b \pmod{a}$ и совпадает с $\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}$ в случае, когда $a = \Lambda a$. Это завершает доказательство леммы 13.3. ■

Замечание. Если u — единица кольца Λ , то обобщенный символ Менникке $\begin{bmatrix} u \\ a \end{bmatrix}$ может быть нетривиальным (ср. п. 13.5). Его можно вычислить следующим образом. Пусть (u) — элемент группы $K_1\Lambda$, отвечающий u .

Утверждение 13.4. Символ $\begin{bmatrix} u \\ a \end{bmatrix} \in K_1\Lambda$ равен произведению $(u) \in K_1\Lambda$ на элемент $1 - [a] \in K_0\Lambda$.

Иными словами, композиция $K_1\Lambda \rightarrow K_1\Lambda/a \rightarrow K_1\Lambda$ совпадает с умножением на $1 - [a]$ (ср. с поведением гомоморфизма «переноса» в п. 14.1).

Доказательство. Выбрав идеал $\mathfrak{r}$ с $a + \mathfrak{r} = \Lambda$ и $a\mathfrak{r} = \Lambda c$, находим из точной последовательности

$$0 \rightarrow \Lambda \xrightarrow{(c, -c)} a \oplus \mathfrak{r} \rightarrow \Lambda \rightarrow 0,$$

что прямая сумма $a \oplus \mathfrak{r}$ свободна. Чтобы вычислить произведение $(u)[a] \in K_1\Lambda$, мы должны изучить автоморфизм $T: a \oplus \mathfrak{r} \rightarrow a \oplus \mathfrak{r}$, который является тождественным на втором слагаемом и совпадает с умножением на первом слагаемом (см. обсуждение после леммы 3.2).

Выберем такой элемент $a \in a$, что $1 - a \in \mathfrak{r}$. В качестве базиса модуля $a \oplus \mathfrak{r}$ мы выберем два вектора

$$b_1 = (a, 1 - a), \quad b_2 = (c, -c).$$

Вычисление показывает, что

$$T(b_2) = c(u - 1)b_1 + (u + a - ua)b_2,$$

так что матрица T имеет вид

$$\begin{pmatrix} * & c(u - 1) \\ * & u + a - ua \end{pmatrix} \in GL(2, \Lambda).$$

Чтобы вычислить $(u)(1 - [a])$, мы должны перейти к матрице

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & c(u - 1) \\ * & u + a - ua \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} u + a - ua & c(1 - u) \\ * & * \end{pmatrix}$$

в $SL(2, \Lambda)$. Соответствующий символ Менникке, очевидно, удовлетворяет соотношению

$$\begin{bmatrix} c(1-u) \\ u+a-ua \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u+a-ua \\ a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u+a-ua \\ x(1-u) \end{bmatrix}.$$

Но

$$u+a-ua \equiv u \pmod{a}, \quad u+a-ua \equiv 1 \pmod{x(1-u)},$$

так что произведение в правой части равно $\begin{bmatrix} u \\ a \end{bmatrix}$, что и требовалось. ■

Вот пример, иллюстрирующий эти конструкции.

Пример 13.5. Пусть Λ — кольцо, которое получается присоединением к кольцу вещественных многочленов $R[x]$ элемента y , удовлетворяющего уравнению $x^2 + y^2 = 1$. Тогда матрица

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \in SL(2, \Lambda)$$

представляет нетривиальный элемент из $K_1\Lambda$. Мы докажем это, пользуясь техникой § 7. Заметим, что Λ можно отождествить с кольцом, состоящим из всех вещественных полиномиальных функций на единичной окружности. Поэтому каждая матрица из $SL(n, \Lambda)$ определяет полиномиальное отображение единичной окружности в $SL(n, R)$. Так как элементарные матрицы отвечают отображениям, гомотопным нулю, эта конструкция определяет отображение $K_1\Lambda \rightarrow \pi_1 SL(R) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Но матрица $\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ соответствует образующей группы $\pi_1 SL(2, R)$ и, значит, отображается в нетривиальный элемент группы $\pi_1 SL(R)$.

Таким образом, символ Менникке $\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$ нетривиален. Так как главный идеал Λx представляется в виде произведения $\wp q$, где

$$y \equiv 1 \pmod{\wp}, \quad y \equiv -1 \pmod{q},$$

находим отсюда

$$1 \neq \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ q \end{bmatrix}.$$

(Здесь p (соответственно q) — идеал, состоящий из полиномиальных функций, обращающихся в нуль в точке $(0, 1)$ (соответственно $(0, -1)$) единичной окружности.) Поэтому элемент

$$\begin{bmatrix} -1 \\ q \end{bmatrix} = (-1)(1 - [q]) \in SK_1\Lambda$$

нетривиален. (На самом деле нетрудно показать, что $SK_1\Lambda$ — циклическая группа порядка 2 с образующей $\begin{bmatrix} -1 \\ q \end{bmatrix}$. (Ср. Басс Х., Алгебраическая K -теория, стр. 542.))

Пусть $R(x, y)$ — поле частных кольца Λ . Любопытно, каково ядро естественного гомоморфизма $K_2\Lambda \rightarrow K_2R(x, y)$ и совпадает ли оно с образом подходящего гомоморфизма кольца $\bigoplus K_2\Lambda/q$. Если такой гомоморфизм существует, то композиция $K_2\Lambda \rightarrow K_2\Lambda/q \rightarrow K_2\Lambda$ должна совпадать с умножением на $1 - [q]$. Поэтому элемент $\{-1, -1\} \in K_2\Lambda/q$ должен переходить в произведение

$$\{-1, -1\} (1 - [q]) = (-1)^2 (1 - [q]) = (-1) \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix},$$

лежащее в ядре $K_2\Lambda \rightarrow K_2R(x, y)$. Вопрос о том, тривиален ли элемент $(-1) \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$, представляется очень трудным.

Вернемся теперь к доказательству теоремы 13.1. Пусть Λ — дедекиндово кольцо, p — ненулевой простой идеал. Тогда соответствие

$$b \mapsto \begin{bmatrix} b \\ p \end{bmatrix}$$

определяет гомоморфизм группы $(\Lambda/p)^* = K_1\Lambda/p$ в $K_1\Lambda$. Образовав прямую сумму по ненулевым простым идеалам, мы получаем требуемый гомоморфизм $\bigoplus K_1\Lambda/p \rightarrow K_1\Lambda$.

Чтобы установить точность получившейся последовательности

$$\bigoplus K_1\Lambda/\mathfrak{p} \rightarrow K_1\Lambda \rightarrow K_1F,$$

мы используем следующую лемму:

Лемма 13.6 (Басс). *Каждую матрицу из $SL(\Lambda)$ можно перевести элементарными операциями над строками и столбцами в матрицу из подгруппы $SL(2, \Lambda)$.*

Следующее доказательство годится для любого коммутативного кольца Λ , в котором каждый ненулевой элемент содержится лишь в конечном числе максимальных идеалов.

Доказательство 13.6. Пусть $(a_1, \dots, a_n)$ — последняя строка любой матрицы A из группы $SL(n, \Lambda)$, где $n \geq 3$. Очевидно,

$$\Lambda a_1 + \dots + \Lambda a_n = \Lambda.$$

Случай 1. Если идеал, порожденный элементами $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$, уже совпадает со всем кольцом Λ , то с помощью элементарных операций над столбцами можно превратить последний элемент a_n в 1. После этого подходящими операциями над строками и столбцами матрицы A ее можно превратить в матрицу вида $\text{diag}(A', 1)$, принадлежащую подгруппе $SL(n-1, \Lambda)$.

Случай 2. Если $a_2 = 0$, то элементарными операциями над столбцами можно превратить a_2 в 1, и мы сможем продолжать, как в случае 1.

Случай 3. Если $a_2 \neq 0$, то существует только конечное число максимальных идеалов, содержащих элементы $a_2, a_3, \dots$ и a_{n-1} . Пусть это будет $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_s$, и пусть первые r из них содержат a_1 , а остальные $s-r$ не содержат. Выберем такой элемент e из Λ , что

$$e \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \dots, \mathfrak{m}_r},$$

$$e \equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}_{r+1}, \dots, \mathfrak{m}_s}.$$

Добавляя к первому столбцу последний, умноженный на e , мы заменим a_1 на $a_1 + ea_n$. Очевидно, идеал, порожденный элементами

$$a_1 + ea_n, a_2, a_3, \dots, a_{n-1},$$

совпадает со всем кольцом Λ . После этого мы можем продолжать, как в случае 1.

Таким образом, данная матрица сравнима по модулю $E(\Lambda)$ с матрицей из $SL(n-1, \Lambda)$. Продолжая по индукции, получаем утверждение леммы. ■

Доказательство точности последовательности $\bigoplus K_1\Lambda/\mathfrak{p} \rightarrow K_1\Lambda \rightarrow K_1F$. Образом первого гомоморфизма, очевидно, является подгруппа $K_1\Lambda$, порожденная всеми символами Менникке $\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}$, которая совпадает с образом $SL(2, \Lambda)$ в $K_1\Lambda$. С другой стороны, ядро второго гомоморфизма, очевидно, совпадает с подгруппой $SL(\Lambda)/E(\Lambda)$ группы $K_1\Lambda$. Но, согласно 13.6, образ $SL(2, \Lambda)$ в точности совпадает с $SL(\Lambda)/E(\Lambda)$. Это доказывает, что написанная последовательность точна.

Докажем теперь следующий факт. Пусть Λ — по-прежнему дедекиндово кольцо с полем частных F .

Лемма 13.7 (Тэйт). *Группа K_2F порождена теми символами $\{a, b\}$, для которых a и b являются взаимно простыми элементами кольца Λ .*

Доказательство. Обозначим через L подгруппу в K_2F , порожденную теми символами $\{a, b\}$, для которых a и b взаимно просты в Λ . Мы должны установить для любых x, y в F^* , что $\{x, y\} \in L$. Проведем доказательство индукцией по числу тех максимальных идеалов $\mathfrak{p}$, для которых одновременно $v_{\mathfrak{p}}(x) \neq 0$ и $v_{\mathfrak{p}}(y) \neq 0$ (здесь $v_{\mathfrak{p}}$ есть $\mathfrak{p}$ -адическое нормирование).

Случай 1. Предположим, что вообще нет простых идеалов $\mathfrak{p}$, для которых $v_{\mathfrak{p}}(x) v_{\mathfrak{p}}(y) \neq 0$. В группе дробных идеалов кольца Λ дробный идеал Λx однозначно представляется в виде отношения a/b двух взаимно простых идеалов, содержащихся в Λ . Аналогично мы можем написать $\Lambda y = c/d$, причем по предположению ab и cd взаимно просты.

Согласно лемме 1.8, существует такой идеал e , который принадлежит классу b^{-1} и взаимно прост с cd . Положив

$$be = \Lambda b, \quad a = bx,$$

мы представим x в виде отношения a/b , где a и b взаимно просты с cd . Аналогично y можно записать в виде c/d , где c и d взаимно просты с a и b одновременно. Тогда

$$\{x, y\} = \{a, c\} \{b, d\} \{a, d\}^{-1} \{b, c\}^{-1},$$

откуда следует, что $\{x, y\} \in L$.

Случай 2. Предположим, что существует ровно один простой идеал p с $v_p(x) v_p(y) \neq 0$. Выберем такой элемент $z \in F^*$, что

$$v_p(z) = -1,$$

но в то же время

$$v_q(z) \geq 0, \quad v_q(z) v_q(y) = 0$$

для всех простых $q \neq p$. (То есть $\Lambda z = p^{-1}r$, где идеал $r \in \{p\}$ взаимно прост со всеми такими q , для которых $v_q(y) \neq 0$.) Положим

$$i = x_p(x), \quad j = v_p(y)$$

и заметим, что $\{z^i x, y\} \in L$ по результату случая 1. Следовательно,

$$(1) \quad \{x, y\} \equiv \{z, y\}^{-i} \pmod{L}.$$

Несложное рассуждение показывает, что элемент $y(1-z)^j$ удовлетворяет условию

$$v_q(z) v_q(y(1-z)^j) = 0$$

для всех простых q . Поэтому

$$\{z, y(1-z)^j\} \in L$$

снова по результату случая 1. Так как $\{z, 1-z\} = 1$, это доказывает, что $\{z, y\} \in L$. Пользуясь сравнением (1), получаем $\{x, y\} \in L$.

С л у ч а й 3. Предположим, наконец, что существует $n > 1$ различных простых идеалов $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$, для которых

$$v_{\mathfrak{p}_i}(x) v_{\mathfrak{p}_i}(y) \neq 0.$$

Выберем такой элемент $w \in F$, для которого

$$v_{\mathfrak{p}_1}(w) = -v_{\mathfrak{p}_1}(x),$$

но

$$v_{\mathfrak{q}}(w) v_{\mathfrak{q}}(y) = 0$$

при $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}_1$. Тогда

$$\{xw, y\} \in L, \quad \{w, y\} \in L$$

по индуктивному предположению. Поэтому снова $\{x, y\} \in L$. Это завершает доказательство 13.7. ■

Определим теперь гомоморфизм

$$d: K_2F \rightarrow \bigoplus K_1\Lambda/\mathfrak{p}$$

следующим способом. Каждая образующая $\{x, y\}$ группы K_2F перейдет в такой элемент прямой суммы, $\mathfrak{p}$ -й координатой которого является ручной символ $d_{\mathfrak{p}}(x, y)$ из п. 11.5. Мы докажем следующую лемму:

ЛЕММА 13.8. Композиция гомоморфизмов

$$K_2F \xrightarrow{d} \bigoplus K_1\Lambda/\mathfrak{p} \rightarrow K_1\Lambda$$

равна нулю.

Доказательство. В силу 13.7 достаточно показать, что в нуль в $K_1\Lambda$ переходят те элементы $\{a, b\}$ из K_2F , для которых a и b являются взаимно простыми элементами кольца Λ . Положив

$$\Lambda a = \mathfrak{p}_1^{m_1} \dots \mathfrak{p}_r^{m_r}, \quad \Lambda b = \mathfrak{q}_1^{n_1} \dots \mathfrak{q}_s^{n_s},$$

мы видим, что образ $\{a, b\}$ в $K_1\Lambda/\mathfrak{q}_j$ равен классу вычетов $a^{n_j} \bmod \mathfrak{q}_j$. Аналогично, образ $\{a, b\}$ в $K_1\Lambda/\mathfrak{p}_i$ обратен классу вычетов $b^{m_i} \bmod \mathfrak{p}_i$. Поэтому образ $\{a, b\}$ в $K_1\Lambda$ равен отношению элементов

$$\begin{bmatrix} a^{n_1} \\ \mathfrak{q}_1 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} a^{n_s} \\ \mathfrak{q}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ \mathfrak{q}_1^{n_1} \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} a \\ \mathfrak{q}_s^{n_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

и

$$\begin{bmatrix} b^{m_1} \\ \mathfrak{p}_1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} b^{m_r} \\ \mathfrak{p}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ \mathfrak{p}_1^{m_1} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} b \\ \mathfrak{p}_r^{m_r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}.$$

Так как $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}$ в силу 13.2, это завершает доказательство леммы 13.8. ■

Проверка того, что последовательность в 13.8 на самом деле точна, основана на очень красивом результате, который мы оставим без доказательства. Начнем с определения. Введенный выше «символ Менникке» можно обобщить следующим образом. Пусть $W_\Lambda \subset \Lambda \times \Lambda$ — множество, состоящее из всех пар взаимно простых элементов кольца Λ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функцией Менникке на кольце Λ со значениями в коммутативной группе C называется бимультимпликативная функция

$$\mu: W_\Lambda \rightarrow C, (x, y) \mapsto \mu(x, y),$$

которая не меняется, если к x добавить кратное y или к y добавить кратное x .

Обозначим через N ядро естественного сюръективного гомоморфизма $GL(2, \Lambda) \rightarrow K_1\Lambda$ (ср. 13.6).

ТЕОРЕМА КУБОТЫ — БАССА. Пусть $\mu: W_\Lambda \rightarrow C$ — любая функция Менникке на дедекиндовом кольце Λ . Тогда соответствие

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \mu(a, b)$$

определяет гомоморфизм из $GL(2, \Lambda)$ в C , в ядре которого лежит N .

Таким образом, существует единственный гомоморфизм $\bar{\mu}$ группы $K_1\Lambda \cong GL(2, \Lambda)/N$ в C , который входит в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} GL(2, \Lambda) & \xrightarrow{\text{первая строка}} & W_\Lambda \\ \downarrow & & \downarrow \mu \\ K_1\Lambda & \xrightarrow{\bar{\mu}} & C \end{array}$$

За доказательством этой теоремы мы отсылаем читателя к книге: Басс Х., Алгебраическая K -теория, стр. 242, или статье: Bass H., Milnor J., Serre J.-P., Solution of the congruence subgroup problem for $SL_n (n \geq 3)$ and $Sp_{2n} (n \geq 2)$, *Publ. Math. INES*, 33 (1967), 59—137.

Мы применим теорему Куботы — Басса следующим образом. Пусть

$$C = (\bigoplus K_1 \Lambda / \mathfrak{p}) / d(K_2 F)$$

— коядро гомоморфизма d . Построим некоторую функцию Менникке на Λ со значениями в C . Для каждой пары $(a, b) \in W_\Lambda$ обозначим через

$$\psi(a, b) \in \bigoplus K_1 \Lambda / \mathfrak{p}$$

элемент, $\mathfrak{p}$ -я координата которого равна

$$(b \bmod \mathfrak{p})^{v_{\mathfrak{p}}(a)},$$

если $\mathfrak{p}$ делит a , и 1 в противном случае. Очевидно, функция ψ бимультимпликативна, и $\psi(a, b)$ не меняется, если к b добавить кратное a . Далее отметим сравнение

$$\psi(a, b) \equiv \psi(b, a) \bmod d(K_2 F).$$

Действительно, как показывает прямое вычисление,

$$\psi(b, a) / \psi(a, b) = d\{a, b\}.$$

Поэтому, определив $\mu(a, b) \in C$ как класс $\psi(a, b)$ по модулю $d(K_2 F)$, мы получаем некоторую функцию Менникке $\mu: W_\Lambda \rightarrow C$. Стало быть, по теореме Куботы — Басса существует единственный гомоморфизм $\bar{\mu}: K_1 \Lambda \rightarrow C$, переводящий класс $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ в $\mu(a, b)$.

Заметим теперь, что композиция $\bigoplus K_1 \Lambda / \mathfrak{p} \rightarrow K_1 \Lambda \xrightarrow{\bar{\mu}} C$ совпадает с естественным гомоморфизмом проекции (редукция по модулю $d(K_2 F)$). В самом деле, образ данного элемента $b \bmod \mathfrak{p}$ в $\mathfrak{p}$ -м слагаемом можно вычислить следующим способом. По определению образ $\begin{bmatrix} b \\ \mathfrak{p} \end{bmatrix}$

в $K_1 \Lambda$ равен $\begin{bmatrix} b' \\ a \end{bmatrix}$, где

$$\mathfrak{p}x = \Lambda a, \quad b' \equiv b \bmod \mathfrak{p}, \quad b' \equiv 1 \bmod x$$

для некоторого идеала $\mathfrak{r}$. Следовательно,

$$\bar{\mu} \begin{bmatrix} b \\ \mathfrak{p} \end{bmatrix} = \bar{\mu} \begin{bmatrix} b' \\ a \end{bmatrix} = \mu(a, b') = (\psi(a, b') \bmod d(K_2F)).$$

Проверяется, что $\mathfrak{p}$ -я компонента $\psi(a, b')$ равна $(b \bmod \mathfrak{p})$, а остальные компоненты тривиальны.

Итак, если элемент из $\bigoplus K_1\Lambda/\mathfrak{p}$ переходит в единицу в $K_1\Lambda$ и, значит, в S , то он должен лежать в $d(K_2F)$. Это показывает точность последовательности 13.8 и завершает доказательство теоремы 13.1. ■

§ 14. ГОМОМОРФИЗМ ПЕРЕНОСА

Результаты этого параграфа принадлежат в основном Бассу и Тэйту.

Обозначим через Λ некоторое кольцо (всегда ассоциативное и с единицей). Пусть $\Gamma \supset \Lambda$ — некоторое большее кольцо, которое как левый Λ -модуль является конечно порожденным и проективным. Гомоморфизм вложения обозначается символом $f: \Lambda \rightarrow \Gamma$. Разумеется, мы считаем, что $f(1) = 1$.

В этом параграфе мы определим *гомоморфизм переноса*

$$f^*: K_i \Gamma \rightarrow K_i \Lambda$$

для $i = 0, 1, 2$ и докажем следующее его свойство.

ТЕОРЕМА 14.1. *Если кольцо Γ коммутативно и $i, j \leq 2$, то для любых $x \in K_i \Gamma$ и $y \in K_j \Lambda$ выполняется тождество*

$$f^*(x \cdot f_*(y)) = (f^*x) \cdot y.$$

Иными словами, гомоморфизм переноса $K_* \Lambda$ -линеен. Например, взяв в качестве x единицу $1 = [\Gamma] \in K_0 \Gamma$, мы получаем формулу

$$f^*(f_*(y)) = f^*(1) \cdot y$$

(ср. п. 13.4).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Басс определяет гомоморфизмы переноса $K_0 \Gamma \rightarrow K_0 \Lambda$ и $K_1 \Gamma \rightarrow K_1 \Lambda$, предполагая только, что существует конечная Λ -линейная резольвента

$$0 \rightarrow P_n \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow P_0 \rightarrow \Gamma \rightarrow 0,$$

состоящая из проективных над Λ конечно порожденных модулей P_k (Алгебраическая K -теория, стр. 352). В этой общности гомоморфизмы $K_0 \Lambda/\mathfrak{a} \rightarrow K_0 \Lambda$ и $K_1 \Lambda/\mathfrak{a} \rightarrow K_1 \Lambda$ из § 13 также становятся гомоморфизмами переноса. Было бы очень интересно выяснить, можно ли определить в этой более общей ситуации также гомоморфизм переноса для K_2 .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Иногда гомоморфизм переноса называют «нормой» или «ограничением кольца». Оба назва-

ния, безусловно, достаточно образные. Название «гомоморфизм переноса» кажется мне удобным по той причине, что оно употребительно для аналогичных отображений в гомологической алгебре и топологии. Так, если Π — некоторая группа, а Π' — ее подгруппа конечного индекса, то классический гомоморфизм переноса

$$H_i(\Pi) \rightarrow H_i(\Pi')$$

связан с нашим гомоморфизмом

$$f^*: K_i(Z\Pi) \rightarrow K_i(Z\Pi')$$

и является частным случаем «топологического гомоморфизма переноса» из группы гомологий некоторого пространства B в группу гомологий некоторого его конечного накрытия E . Аналогичный гомоморфизм $K^*(E) \rightarrow K^*(B)$ топологической K -теории тесно связан с нашим гомоморфизмом переноса $K_*(C^E) \rightarrow K_*(C^B)$, где C^E — кольцо непрерывных комплексных функций на E (ср. § 7).

Определение гомоморфизма переноса. Любой конечно порожденный проективный модуль P над Γ можно рассматривать также как конечно порожденный проективный модуль над подкольцом Λ . Этот Λ -модуль мы будем обозначать символом P_Λ в тех случаях, когда его будет необходимо отличать от P .

Очевидно, существует единственный гомоморфизм

$$f^*: K_0\Gamma \rightarrow K_0\Lambda,$$

переводящий каждую образующую $[P]$ группы $K_0\Gamma$ в образующую $[P_\Lambda]$ группы $K_0\Lambda$.

Чтобы ввести перенос на K_1 и на K_2 , определим сначала вложение

$$f^\#: GL(n, \Gamma) \rightarrow GL(\Lambda).$$

Любая матрица $X \in GL(n, \Gamma)$ определяет Γ -линейный автоморфизм свободного модуля Γ^n , который мы тоже обозначим через X . Выберем проективный Λ -модуль Q , такой, что прямая сумма $\Gamma \oplus Q$ свободна, скажем, с r образующими над Λ . Тогда модуль $\Gamma^n \oplus Q^n$ также Λ -свободен, и мы можем построить Λ -линейный автоморфизм

$$X \oplus (\text{identity } Q^n).$$

Выбрав некоторый Λ -базис этой прямой суммы, мы представим автоморфизм $X \oplus (\text{identity})$ матрицей, которую мы обозначим символом

$$f^\#(X) \in GL(nr, \Lambda) \subset GL(\Lambda).$$

Как в п. 3.2, проверяется, что этот гомоморфизм $f^\#$ определен с точностью до внутреннего автоморфизма группы $GL(\Lambda)$.

Переходя теперь к фактору по коммутанту и беря предел при $n \rightarrow \infty$, мы получаем гомоморфизм переноса из $K_1\Gamma$ в $K_1\Lambda$. Аналогично, построив мультипликатор Шура гомоморфизма

$$E(n, \Gamma) \rightarrow E(\Lambda)$$

и перейдя к пределу при $n \rightarrow \infty$, мы получим гомоморфизм переноса из $K_2\Gamma$ в $K_2\Lambda$. Детали мы оставляем читателю.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14.2. Предположим, что кольцо Λ коммутативно. Тогда композиция естественных гомоморфизмов

$$\Gamma \rightarrow K_1\Gamma \xrightarrow{f^*} K_1\Lambda \xrightarrow{\det} \Lambda$$

называется гомоморфизмом нормы $\Gamma \rightarrow \Lambda$. В качестве примера рассмотрим случай, когда Γ — свободный Λ -модуль с базисом $b_1, \dots, b_n$. Положим $\gamma b_i = \sum \lambda_{ij} b_j$. Очевидно, норма γ совпадает с определителем матрицы (λ_{ij}) . Ср. трактовку Ван-дер-Вардена (Ван-дер-Варден Б., Современная алгебра, т. I, Гостехиздат, М., 1947).

Доказательство теоремы 14.1 будет основано на следующем ассоциативном законе. Пусть M — некоторый Γ -модуль, а N — некоторый Λ -модуль, и оба кольца $\Gamma \supset \Lambda$ коммутативны. Тогда модуль

$$M \otimes_{\Lambda} N = (M \otimes_{\Gamma} \Gamma) \otimes_{\Lambda} N$$

канонически изоморфен $M \otimes_{\Gamma} (\Gamma \otimes_{\Lambda} N)$.

Чтобы упростить обозначения, мы будем обозначать эти модули просто через $M \otimes N$. Таким образом, символ $\otimes$ здесь относится к тензорному произведению

над Λ , но если M является Γ -модулем, то $M \otimes N$ также имеет структуру Γ -модуля.

Доказательство теоремы 14.1 в случае $i = j = 1$. Пусть даны элементы

$$x \in K_1\Gamma, \quad y \in K_1\Lambda.$$

Выберем представитель $X \in GL(m, \Gamma)$ элемента x и представитель $Y \in GL(n, \Lambda)$ элемента y . Мы будем рассматривать X и Y как автоморфизмы свободных модулей Γ^m и Λ^n соответственно. Пусть I, I' — их тождественные автоморфизмы. Построим прямую сумму трех экземпляров модуля $\Gamma^m \otimes \Lambda^n$ и построим Γ -линейные автоморфизмы

$$\xi = (X \otimes I') \oplus (X \otimes I')^{-1} \oplus (I \otimes I')$$

и

$$\eta = (I \otimes Y) \oplus (I \otimes I') \oplus (I \otimes Y)^{-1}$$

этой прямой суммы. Взяв прообразы ξ и η в группе Стейнберга, мы можем образовать коммутатор

$$\xi * \eta \in K_2\Gamma.$$

По определению это и есть произведение $x \cdot f_* y$.

Чтобы перенести этот элемент в $K_2\Lambda$, очевидно, достаточно применить к ξ и η гомоморфизм

$$f^\# : GL(3mn, \Gamma) \rightarrow GL(\Lambda).$$

Выберем Q так, чтобы модуль $\Gamma \oplus Q$ был Λ -свободен, и обозначим через ι тождественное отображение модуля Q^{3mn} . Тогда элемент $f^*(x \cdot f_* y)$ совпадает с коммутатором

$$(\xi \oplus \iota) * (\eta \oplus \iota) \in K_2\Lambda.$$

Теперь мы должны вычислить $f^*(x) \cdot y$. Элемент $f^*(x) \in K_1\Lambda$ представлен Λ -линейным автоморфизмом $X \oplus I''$ прямой суммы $\Gamma^m \oplus Q^m$, где I'' — тождественное отображение Q^m . Построим прямую сумму трех экземпляров модуля $(\Gamma^m \oplus Q^m) \otimes \Lambda^n$. Положив

$$\xi_1 = (X \oplus I'') \otimes I' \oplus (X \oplus I'')^{-1} \otimes I' \oplus (I \oplus I'') \otimes I'$$

и

$$\eta_1 = (I \oplus I'') \otimes Y \oplus (I \oplus I'') \otimes I' \oplus (I \oplus I'') \otimes Y^{-1},$$

находим, что

$$f^*(x) \cdot y = \xi_1 * \eta_1 \in K_2 \Lambda.$$

Чтобы привести эти выражения к более удобному виду, заменим каждое слагаемое $(\Gamma^m \oplus Q^m) \otimes \Lambda^n$ на $(\Gamma^m \otimes \Lambda^n) \oplus Q^{mn}$ и затем перенесем все слагаемые Q^{mn} направо. Тогда ξ_1 перейдет в $\xi \oplus \iota$, а η_1 примет вид $\eta \oplus \zeta$. Поэтому

$$f^*(x) \cdot y = (\xi \oplus \iota) * (\eta \oplus \zeta) \in K_2 \Gamma.$$

Учитывая, что коммутатор бимультпликативен (п. 8.1), мы получаем, что это выражение равно произведению

$$(\xi \oplus \iota) * (\eta \oplus \iota) = f^*(x \cdot f_* y)$$

на элемент

$$(\xi \oplus \iota) * (1 \oplus \zeta),$$

который, очевидно, равен 1.

Это завершает доказательство в случае $i = j = 1$. Разбор остальных случаев теоремы 14.1 мы оставляем читателю. ■

Одно приложение к случаю полей

Пусть F — некоторое поле, $F[x]$ — кольцо многочленов от одной переменной, α и β — элементы группы $F^\times \cong K_1 F$. Для любого положительного целого числа n мы можем рассмотреть главный идеал

$$(x^n - \beta) \subset F[x]$$

и соответствующее факторкольцо

$$\Gamma = F[x]/(x^n - \beta)$$

размерности n над F .

Замечание. Если многочлен $x^n - \beta$ неприводим, то Γ является полем. В более общем случае, когда $x^n - \beta$ распадается над F в произведение k неприводимых сомножителей, то Γ распадается в прямое произведение k полей, расширений поля F , каждое из которых содержит по крайней мере один корень n -й степени из β .

Следствие 14.3. Если α принадлежит образу норменного гомоморфизма

$$\text{norm} : \Gamma \rightarrow F,$$

где $\Gamma = F[x]/(x^n - \beta)$, то элемент

$$\{\alpha, \beta\} \in K_2F$$

является n -й степенью в (мультипликативной группе) K_2F .

Иными словами,

$$\{\alpha, \beta\} \equiv 1 \pmod{(K_2F)^n},$$

где $(K_2F)^n$ — подгруппа, состоящая из всех n -х степеней в K_2F .

Доказательство. Напомним, что, согласно 14.2, норменный гомоморфизм

$$\text{norm} : \Gamma \rightarrow F$$

можно отождествить с гомоморфизмом переноса $K_1\Gamma \rightarrow K_1F$. (Группа $K_1\Gamma$, очевидно, изоморфна Γ , где Γ — прямое произведение полей или локальных колец). Поэтому теорему 14.1 можно записать в виде

$$f^* \{\gamma, f(\beta)\} = \{\text{norm } \gamma, \beta\}$$

для $\gamma \in \Gamma$, $\beta \in F$. Предположим, что α является нормой некоторого элемента $\gamma \in \Gamma$. Так как элемент $f(\beta) = \beta$ является n -степенью в $K_2\Gamma$, отсюда следует, что $\{\gamma, f(\beta)\}$ является n -степенью в $K_2\Gamma$ и, стало быть,

$$f^* \{\gamma, f(\beta)\} = \{\alpha, \beta\}$$

является n -й степенью в K_2F . Это завершает доказательство. ■

В следующем § 15 мы изучим обратную задачу:

Если $\{\alpha, \beta\} \equiv 1 \pmod{(K_2F)^n}$, следует ли отсюда, что α является нормой элемента из $F[x]/(x^n - \beta)$?

Мы обнаружим, что это так, например, когда n не делится на квадрат и взаимно просто с характеристикой поля F . Однако обратное утверждение не может быть справедливо без ограничений на n :

Пример 14.4. Рассмотрим элементы 5 и -1 в поле 2-адических чисел Q_2 и положим $n=4$. Тогда

$$\{5, -1\} \equiv 1 \pmod{(K_2 Q_2)^4}$$

и все же 5 не является нормой из биквадратного расширения $Q_2(\sqrt[4]{-1})$.

Доказательство. Сравнение $\{5, -1\} \equiv \equiv \pmod{(K_2 Q_2)^4}$ можно доказать, установив, что -1 является нормой из $Q_2(\sqrt[4]{5})$. Можно также проверить его непосредственно, заметив, что

$$\begin{aligned} \{5, -1\} &= \{5, -1\} \{5, -4\} \{-3, 4\} = \\ &= \{5, 4\} \{-3, 4\} = \{-15, 4\} \end{aligned}$$

и что -15 является 4-й степенью в Q_2 .

Чтобы показать, что 5 не является нормой, достаточно заметить, что поле $Q_2(\sqrt[4]{-1})$ содержит подполе $Q_2(\sqrt{2})$. Но 5 не может быть нормой из $Q_2(\sqrt{2})$, потому что символ Гильберта $(5, 2)_2$ нетривиален. ■

§ 15. СИМВОЛЫ НОРМЕННЫХ ВЫЧЕТОВ

В этом параграфе в основном излагается классический материал.

Пусть F — поле, содержащее примитивный корень n -й степени из единицы ω . (Иными словами, ω — элемент точно n -го порядка в $F^\times$.) Мы построим некоторый символ Стейнберга a_ω для F со значениями в группе Брауэра поля F . (Ср. Serre J.-P., Corps Locaux, Hermann, 1968.) Наше изложение подсказано способом, который в случае $n=2$ использует О'Мира (O'Meara O., Introduction to Quadratic Forms, Springer, 1963).

Вот основная конструкция. Пусть даны элементы α и β в группе $F^\times$. Обозначим через

$$A = A_\omega(\alpha, \beta)$$

ассоциативную алгебру с единицей размерности n^2 над F , порожденную двумя элементами x, y , которые подчинены соотношениям

$$x^n = \alpha 1, \quad y^n = \beta 1, \quad yx = \omega xy,$$

где 1 означает единичный элемент A . Тем самым одночлены $x^i y^j$ с $0 \leq i < n$, $0 \leq j < n$ составляют базис A над F .

Доказательство существования такой алгебры несложно, и мы оставим его читателю.

Напомним теперь определение группы Брауэра поля F . Алгебра A над F (ассоциативная с единицей) называется *простой*, если у нее нет двусторонних идеалов, кроме 0 и A , и *центральной*, если ее центр совпадает с $F1 \cong F$.

Согласно теореме Веддерберна, любая конечномерная простая алгебра A над F изоморфна алгебре $M_k(D)$ ($k \times k$)-матриц над некоторым телом¹⁾ D . Далее целое число $k \geq 1$ и класс тела D с точностью до изоморфизма однозначно определяются по A . Поэтому мы можем определить отношение *подобия* алгебр: соответ-

¹⁾ Более общо, всякое простое артиново кольцо является матричной алгеброй над телом. Вот краткое доказательство этого результата. Обозначим через $m \subseteq A$ некоторый минимальный пра-

ствующие им тела изоморфны над F . Группой Брауэра $\text{Br}(F)$ называется абелева группа, состоящая из всех классов конечномерных центральных простых алгебр над F с точностью до подобия, с групповой операцией, которая индуцирована тензорным умножением над F . Дальнейшие детали можно найти в книгах: О'Мира О., *Introduction to Quadratic Forms*, или Ван-дер-Варден Б., *Современная алгебра*, или же Вейль А., *Основы теории чисел*, «Мир», М., 1972.

ТЕОРЕМА 15.1. Алгебра $A = A_\omega(\alpha, \beta)$ центральная и простая, поэтому она представляет некоторый элемент в группе Брауэра. Функция

$$a_\omega : F^\times \times F^\times \rightarrow \text{Br}(F)$$

является символом Стейнберга для F .

Доказательство. Рассмотрим F -линейные отображения A в себя вида

$$T_x(a) = xax^{-1}, \quad T_y(a) = yay^{-1}.$$

Любой базисный одночлен $x^i y^j$ является собственным вектором как отображения T_x , так и T_y с собственными значениями ω^{-j} и ω^i соответственно. Отсюда не-

вый идеал. Из простоты A следует, что двусторонний идеал Am должен совпадать с A . Поэтому 1 можно представить в виде

$$1 \in a_1 m + a_2 m + \dots + a_k m.$$

Выберем такое представление с наименьшим возможным k . Тогда k -кратная прямая сумма $m \oplus \dots \oplus m$ как правый A -модуль изоморфна A . Действительно, соответствие

$$(m_1, \dots, m_k) \mapsto a_1 m_1 + \dots + a_k m_k,$$

очевидно, A -линейно справа и сюръективно. Если бы существовало соотношение вида $a_1 m_1 + \dots + a_k m_k = 0$, в котором, скажем, $m_k \neq 0$ и, значит, $m_k A = m$, то включение

$$a_k m = a_k m_k A \subset a_1 m + \dots + a_{k-1} m$$

означало бы, что $1 \in a_1 m + \dots + a_{k-1} m$, в противоречие с выбором k .

Отсюда вытекает, что кольцо $\text{End}_A(m \oplus \dots \oplus m)$, состоящее из всех A -линейных справа отображений $m \oplus \dots \oplus m$ в себя, изоморфно кольцу $\text{End}_A(A) \cong A$. С другой стороны, $\text{End}_A(m \oplus \dots \oplus m)$ можно отождествить с кольцом $(k \times k)$ -матриц над телом $\text{End}_A(m)$. Это завершает доказательство. ■

медленно вытекает, что центр алгебры A как пространство над F порожден единственным элементом $x^0 y^0 = 1$.

Чтобы установить простоту A , рассмотрим ненулевой двусторонний идеал $\mathfrak{b}$ и выберем элемент

$$b_0 = \sum \varphi_{ij} x^i y^j \in \mathfrak{b}.$$

Пусть, скажем, $\varphi_{pq} \neq 0$. Тогда элемент

$$b_1 = x^{-p} b_0 y^{-q} \in \mathfrak{b}$$

можно записать в виде $\sum \Psi_{ij} x^i y^j$, где $\Psi_{00} \neq 0$. После этого построим элемент

$$b_2 = (T_x - \omega)(T_x - \omega^2) \dots (T_x - \omega^{n-1}) b_1$$

идеала $\mathfrak{b}$. Вычисление показывает, что он равен

$$(1 - \omega)(1 - \omega^2) \dots (1 - \omega^{n-1}) \sum \Psi_{i0} x^i.$$

Аналогично элемент

$$b_3 = (T_y - \omega)(T_y - \omega^2) \dots (T_y - \omega^{n-1}) b_2$$

идеала $\mathfrak{b}$ равен $(1 - \omega)^2 (1 - \omega^2)^2 \dots (1 - \omega^{n-1})^2 \Psi_{00} 1$. Таким образом, b_3 является единицей и, значит, $\mathfrak{b} = A$, что доказывает простоту алгебры A .

Для дальнейшего нам понадобится следующая лемма.

Лемма 15.2. Пусть A — простая алгебра размерности n^2 над F , и пусть $x \in A$ — элемент, который удовлетворяет полиномиальному уравнению вида

$$f(x) = x^n + \varphi_1 x^{n-1} + \dots + \varphi_n 1 = 0,$$

но не удовлетворяет никакому уравнению меньшей степени. Если $f(x)$ разлагается в произведение различных линейных множителей над F , то A изоморфна матричной алгебре $M_n(F)$.

Доказательство. Подалгебра A , порожденная степенями x , очевидно, изоморфна факторкольцу $F[x]/(f(x))$. Китайская теорема об остатках показывает, что оно распадается в прямое произведение n экземпляров поля F . Следовательно, A содержит n попарно ортогональных идемпотентов

$$e_i e_i = e_i, \quad e_i e_j = 0 \quad \text{при } i \neq j$$

с $e_1 + \dots + e_n = 1$. Значит, A распадается в прямую сумму $e_1 A \oplus \dots \oplus e_n A$ правых идеалов, из которых по крайней мере один имеет над F размерность $\leq n$. Сравнение с любым доказательством теоремы Веддерберна теперь показывает, что A — матричная алгебра над F . ■

Пример 15.3. Снова предположим, что F содержит примитивный корень из 1 степени n . Если α является n -й степенью в F , то многочлен $x^n - \alpha$ разлагается на разные линейные множители, откуда следует, что $a_\omega(\alpha, \beta) = 1$. В частности, это означает, что $a_\omega(1, \beta) = 1$.

Доказательство бимультимпликативности символа $a_\omega(\alpha, \beta)$. Тензорное произведение

$$B = A_\omega(\alpha, \beta) \underset{F}{\otimes} A_\omega(\alpha, \gamma)$$

порождено образующими x, y, X, Y , которые связаны соотношениями

- (1) $x^n = \alpha 1, \quad y^n = \beta 1, \quad yx = \omega xy,$
- (2) $X^n = \alpha 1, \quad Y^n = \gamma 1, \quad YX = \omega XY,$
- (3) $xX = Xx, \quad xY = Yx, \quad yX = Xy, \quad yY = Yy.$

Обозначим через B' подалгебру, порожденную x и yY , а через B'' — подалгебру, порожденную $x^{-1}X$ и Y . Тогда, очевидно,

$$B' \cong A_\omega(\alpha, \beta\gamma), \quad B'' \cong A_\omega(1, \gamma).$$

Заметим также, что все образующие подалгебры B' коммутируют со всеми образующими B'' . Из простоты $B' \otimes B''$ следует, что естественное отображение

$$B' \otimes B'' \rightarrow B$$

является изоморфизмом. Это доказывает, что

$$A_\omega(\alpha, \beta\gamma) \otimes A_\omega(1, \gamma) \cong A_\omega(\alpha, \beta) \otimes A_\omega(\alpha, \gamma)$$

или, иначе,

$$a_\omega(\alpha, \beta\gamma) a_\omega(1, \gamma) = a_\omega(\alpha, \beta) a_\omega(\alpha, \gamma).$$

Но $a_\omega(1, \gamma) = 1$ в силу 15.3, поэтому символ a_ω мультипликативен по второму аргументу. Мультипликатив-

ность по первому аргументу немедленно следует отсюда с помощью тождества $a_\omega(\alpha, \beta) = a_{\omega^{-1}}(\beta, \alpha)$.

Доказательство тождества Стейнберга $a_\omega(1 - \beta, \beta) = 1$. Назовем «некоммутативным биномиальным коэффициентом» многочлен

$$b_i^n(c) = f_n(c)/f_i(c)f_{n-i}(c) = c^i b_i^{n-1}(c) + b_{i-1}^{n-1}(c),$$

где

$$f_n(c) = (c - 1)(c^2 - 1) \dots (c^n - 1).$$

Нетрудно проверить, что это действительно многочлен. Далее пусть x и y — элементы любого кольца, удовлетворяющие соотношению $yx = xyc$, где c — элемент центра. Индукция по n показывает тогда, что

$$(x + y)^n = \sum b_i^n(c) x^i y^{n-i}.$$

В частности, образующие x и y кольца $A_\omega(\alpha, \beta)$ в силу соотношений $b_i^n(\omega) = 0$ при $0 < i < n$ удовлетворяют тождеству

$$(x + y)^n = x^n + y^n = (\alpha + \beta) 1.$$

Применив 15.2 к элементу $x + y$, мы получаем, что $a_\omega(\alpha, \beta) = 1$, если $\alpha + \beta = 1$. Это завершает доказательство теоремы 15.1. ■

Напомним, что $(K_2F)^n$ обозначает подгруппу K_2F , состоящую из всех n -х степеней.

Следствие 15.4. Символ Стейнберга $a_\omega(\alpha, \beta)$ индуцирует гомоморфизм

$$a_\omega: K_2F \rightarrow \text{Br}(F),$$

в ядре которого содержится группа $(K_2F)^n$.

Доказательство. Как в п. 11.3, определим этот гомоморфизм с помощью соответствия

$$\{\alpha, \beta\} \mapsto a_\omega(\alpha, \beta).$$

Так как тождество

$$a_\omega(\alpha, \beta)^n = a_\omega(\alpha^n, \beta) = 1$$

следует из 15.3, это завершает доказательство. ■

Замечание. Возможно, что ядро этого гомоморфизма $a_\omega: K_2F \rightarrow \text{Br}(F)$ всегда совпадает с $(K_2F)^n$. Я не знаю, как приступить к этой задаче.

Зависимость символов a_ω от выбора корня из единицы ω несколько необычная. Ее можно описать так:

Лемма 15.5 Если $\xi = \omega^i$, где i взаимно просто с n (так что ξ — другой примитивный корень n -й степени из 1), то

$$a_\xi(\alpha, \beta)^i = a_\omega(\alpha, \beta).$$

С другой стороны, если j — делитель n , так что $\xi = \omega^j$ — примитивный корень из единицы степени n/j , то

$$a_\xi(\alpha, \beta) = a_\omega(\alpha, \beta)^j.$$

Доказательство. Если i взаимно просто с n , то можно использовать элементы x^i и y (вместо x и y) в качестве образующих алгебры $A_\omega(\alpha, \beta)$. Тогда получаем

$$A_\omega(\alpha, \beta) \cong A_{\omega^i}(\alpha^i, \beta),$$

откуда следует первое равенство.

Доказательство второго равенства можно провести так. Замена переменных, аналогичная той, которая использовалась в доказательстве бимультимпликативности, показывает, что тензорное произведение $A_\xi(\alpha, \beta) \otimes A_\omega(\beta, \alpha^j)$ изоморфно $A_\xi(\alpha, 1) \otimes A_\omega(\beta, 1)$. Поэтому

$$a_\xi(\alpha, \beta) a_\omega(\beta, \alpha)^j = a_\xi(\alpha, 1) a_\omega(\beta, 1) = 1,$$

что и требовалось. ■

Замечание 15.6. Зафиксировав целое число n , мы можем построить такой символ Стейнберга, который не зависит от выбора ω . Пусть $\text{Br}_n(F)$ — подгруппа $\text{Br}(F)$, состоящая из элементов периода n , μ_n — группа корней из единицы степени n в F . Тогда символ

$$\omega \otimes a_\omega(\alpha, \beta) \in \mu_n \otimes \text{Br}_n(F)$$

не зависит от выбора ω . Это следует из вычисления

$$\omega^i \otimes a_{\omega^i}(\alpha, \beta) = \omega \otimes a_{\omega^i}(\alpha, \beta)^i = \omega \otimes a_\omega(\alpha, \beta)$$

для i , взаимно простых с n .

Таким образом, существует канонически определенный гомоморфизм

$$\omega \otimes a_\omega : K_2 F \rightarrow \mu_n \otimes \text{Br}_n(F).$$

Заметим, что группу его значений $\mu_n \otimes \text{Br}_n(F)$ можно отождествить с $\text{Tor}(\mu_n, \text{Br}(F))$.

Теперь мы докажем основное свойство, оправдывающее название «символ норменного вычета степени n » для a_ω .

ТЕОРЕМА 15.7. Символ $a_\omega(\alpha, \beta)$ равен 1 в том и только том случае, когда α является нормой из поля $F(\sqrt[n]{\beta})$ или же из кольца $F[y]/(y^n - \beta)$.

Оба условия эквивалентны. Действительно, если многочлен $y^n - \beta$ разлагается в произведение d неприводимых сомножителей, то кольцо $F[y]/(y^n - \beta)$ распадается в прямое произведение d полей, каждое из которых, очевидно, изоморфно $F(\sqrt[n]{\beta})$.

Доказательство. (Ср. Ван-дер-Варден Б., Современная алгебра, т. II.) Если $a_\omega(\alpha, \beta) = 1$, то алгебра $A_\omega(\alpha, \beta) \cong M_n(F)$ изоморфна кольцу $\text{Hom}_F(V, V)$, где V есть n -мерное векторное пространство. Стало быть, образующие x и y кольца $A_\omega(\alpha, \beta)$ соответствуют линейным преобразованиям X и Y пространства V . Степень минимального многочлена $y^n - \beta$ преобразования Y равна n , поэтому можно выбрать такой базис $v_1, \dots, v_n$ пространства V , что Y приведется к нормальной форме следующего вида:

$$Y(v_i) = v_{i+1} \text{ при } i < n, \quad Y(v_n) = \beta v_1.$$

Рассмотрим теперь F -линейное отображение $Z \mapsto T_Y(Z) = YZY^{-1}$ кольца $\text{Hom}_F(V, V)$. Элемент Z , определенный условием

$$Z(v_i) = \omega^i v_i,$$

очевидно, является собственным вектором отображения T_Y с собственным значением ω^{-1} . Так как все пространство, отвечающее собственному значению ω^{-1} , натянуто на элементы $X^{-1}, X^{-1}Y, \dots, X^{-1}Y^{n-1}$, отсюда следует, что

$$Z = X^{-1}f(Y),$$

где f — некоторый многочлен. Следовательно, элемент $Z^n = I$ равен в то же время

$$X^{-1}f(Y) X^{-1}f(Y) \dots X^{-1}f(Y) = f(\omega Y) f(\omega^2 Y) \dots f(\omega^n Y) X^{-n}.$$

Значит, произведение n членов $\prod f(\omega^i Y)$ равно $X^n = \alpha I$.

Теперь рассмотрим некоторое расширение $F(\eta)$, где $\eta^n = \beta$. Отобразив Y в η , находим, что

$$f(\omega\eta) f(\omega^2\eta) \dots f(\omega^n\eta) = \alpha.$$

Если степень $F(\eta)$ над F равна n , то, очевидно, это произведение равно норме $f(\eta)$. В общем случае, когда $F(\eta)$ имеет степень d над F , легко убедиться, что α совпадает с нормой произведения n/d членов

$$f(\omega\eta) f(\omega^2\eta) \dots f(\omega^{n/d}\eta).$$

Поэтому α является нормой элемента из $F(\eta)$.

Обратное утверждение можно доказать непосредственно или же вывести из § 14 следующим способом. Если α является нормой из $F[y]/(y^n - \beta)$, то

$$\{\alpha, \beta\} \equiv 1 \pmod{(K_2 F)^n}$$

в силу 14.3, откуда $a_\omega(\alpha, \beta) = 1$ по 15.4. Это завершает доказательство. ■

Случай локального поля

Чтобы проиллюстрировать эти конструкции, рассмотрим случай локального поля F . Иными словами, предположим, что F полно относительно дискретного нормирования v и имеет конечное поле классов вычетов.

Лемма 15.8. *Предположим, что F — локальное поле, содержащее примитивный корень из единицы ω степени n . Тогда существуют такие элементы поля π и γ , что элемент группы Брауэра $a_\omega(\pi, \gamma)$ имеет период в точности n .*

Доказательство. Обозначим через $E \supset F$ единственное неразветвленное расширение степени n .

Так как это расширение Галуа, группа которого циклическа порядка n , и так как F содержит корни из

единицы степени n , из теории Куммера следует, что $E = F(\sqrt[n]{\gamma})$ для подходящего элемента $\gamma \in F^\cdot$.

(Теорема Куммера изложена в «Алгебре» Ленга. Нужные здесь свойства локальных полей изложены в записках Артина (Artin E., Algebraic Numbers and Algebraic Functions, Gordon and Breach, 1967, стр. 127 — 130).)

Так как это расширение не разветвлено, образ норменного гомоморфизма $E^\cdot \rightarrow F^\cdot$ должен состоять целиком из элементов α , удовлетворяющих условию

$$v(\alpha) \equiv 0 \pmod{n}.$$

Следовательно, если π — любой элемент из $F^\cdot$ с $v(\pi) = 1$, то его степени $\pi, \pi^2, \dots, \pi^{n-1}$ не могут быть нормами из $F(\sqrt[n]{\gamma})$. Из 15.7 тогда следует, что порядок элемента

$$a_\omega(\pi, \gamma) \in \text{Br}(F)$$

равен в точности n . Это завершает доказательство. ■

Замечание 15.9. Обычный символ норменного вычета степени n для локального поля F принимает значения в группе μ_n корней из единицы степени n в F . Эту конструкцию можно связать с нашими определениями следующим способом. Группа Брауэра $\text{Br}(F)$ локального поля канонически изоморфна группе Q/Z рациональных чисел по модулю 1 (см., например, обзор Серра в книге: Алгебраическая теория чисел, под ред. Дж. Касселса и А. Фрёлиха, «Мир», М. 1969, стр. 200). Следовательно, подгруппа $\text{Br}_n(F)$, определенная в замечании 15.6, циклична порядка n и имеет отмеченную образующую b_0 . Символ $(\alpha, \beta)_F$ со значениями в μ_n можно теперь определить следующим способом.

Обозначим через $(\alpha, \beta)_F$ тот корень из единицы, для которого соотношение

$$\omega \times a_\omega(\alpha, \beta) = (\alpha, \beta)_F \times b_0$$

справедливо в группе $\mu_n \times \text{Br}_n(F)$. Из 15.6 следует, что этот символ Стейнберга $(\alpha, \beta)_F$ определен корректно.

[Если принять, что группа $\text{Br}_n(F)$ циклична, то отмеченную образующую b_0 можно построить следующим образом.

Пусть $E = F(\sqrt[n]{\gamma})$ — единственное неразветвленное расширение степени n , как в 15.8. Автоморфизм Фробениуса φ поля E над F определен тем, что он индуцирует автоморфизм $\bar{e} \mapsto \bar{e}^q$ на поле классов вычетов $\bar{E}$; здесь q означает число элементов в $\bar{F}$. Положив

$$\omega(\gamma) = \varphi(\sqrt[n]{\gamma}) / \sqrt[n]{\gamma},$$

мы получим некоторый примитивный корень из единицы степени n . Положим теперь

$$b_0 = a_{\omega(\gamma)}(\pi, \gamma).$$

Этот элемент порождает группу $\text{Br}_n(F)$ в силу леммы 15.8. Он не зависит от γ в силу 15.5. Чтобы установить его независимость от π , нужно прежде всего показать, что любой элемент $u \in F$ со свойством $v(u) = 0$ является нормой из E . Это можно проверить с помощью элементарного рассуждения, пользуясь тем обстоятельством, что норма и след из $\bar{E}$ в $\bar{F}$ сюръективны. Нужно уравнение $a_{\omega(\gamma)}(\pi u, \gamma) = a_{\omega(\gamma)}(\pi, \gamma)$ следует после этого из теоремы 15.7.]

Замечание 15.10. Вот набросок более обычного определения символа норменного вычета n -й степени в локальном поле F . Пусть $K \supset F$ — расширение Куммера, которое получается присоединением корней степени n из всех элементов $F^\bullet$. Это конечное расширение, потому что $(F^\bullet)^n$ — подгруппа конечного индекса в $F^\bullet$. Согласно теории Куммера, группа Галуа G поля K над F канонически изоморфна $\text{Hom}(F^\bullet, \mu_n)$. (Каждый автоморфизм σ из G соответствует гомоморфизму $\beta \mapsto \sigma(\sqrt[n]{\beta}) / \sqrt[n]{\beta}$ группы $F^\bullet$ в μ_n .) Композиция этого изоморфизма Куммера с изоморфизмом норменного вычета

$$F^\bullet / \text{norm } K^\bullet \xrightarrow{\cong} G$$

локальной теории полей классов дает гомоморфизм

$$F^\bullet \rightarrow F^\bullet / \text{norm } K^\bullet \cong G \cong \text{Hom}(F^\bullet, \mu_n),$$

ассоциированный с требуемым бимультимпликативным спариванием

$$F^\bullet \times F^\bullet \rightarrow \mu_n.$$

Тождество Стейнберга $(1 - \beta, \beta) \mapsto 1$ устанавливается с помощью замечания, что $1 - \beta$ является нормой из поля $E = F(\sqrt[n]{\beta})$, и коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} F^\bullet \rightarrow F^\bullet / \text{norm}_{K/F} K^\bullet & \xrightarrow{\cong} & G_{K/F} \\ \downarrow & & \downarrow \\ F^\bullet / \text{norm}_{E/F} E^\bullet & \xrightarrow{\cong} & G_{E/F} \end{array}$$

По поводу дальнейших деталей мы отсылаем читателя к следующим источникам:

Artin E., Tate J., Class field theory, Benjamin, 1968;
Алгебраическая теория чисел, под ред. Дж. Касселса и А. Фрелиха, «Мир», М., 1969;

Serre J.-P., Corps locaux. Hermann, 1968;

Вейль А., Основы теории чисел, «Мир», М., 1972.

Факторгруппа $K_2F/(K_2F)^n$

Вернемся теперь к вопросу, поставленному в п. 14.3 и 14.4.

Следствие 15.11. *Если F содержит корни из единицы степени n , то*

$$\{\alpha, \beta\} \equiv 1 \pmod{(K_2F)^n}$$

в том и только том случае, когда α является нормой элемента из кольца $F[y]/(y^n - \beta)$.

Доказательство. Если $\{\alpha, \beta\} \equiv 1 \pmod{(K_2F)^n}$, то $a_\omega(\alpha, \beta) = 1$ в силу 15.4, так что α является нормой, согласно 15.7. Так как обратное утверждение было доказано в п. 14.3, это завершает доказательство. ■

Теорема 15.12 (Басс, Тэйт). *Пусть n — любое целое число, не делящееся на квадрат и на характеристику поля F . Тогда*

$$\{\alpha, \beta\} \equiv 1 \pmod{(K_2F)^n}$$

в том и только том случае, когда α является нормой из кольца $F[y]/(y^n - \beta)$.

(Ср. п. 14.4.)

Доказательство. Пусть p — простой делитель числа n . Если $\{\alpha, \beta\} \equiv 1 \pmod{(K_2F)^n}$, то обязательно $\{\alpha, \beta\} \equiv 1 \pmod{(K_2F)^p}$. Мы покажем, что α является нормой элемента из $F(\eta')$, где η' — подходящий корень

p -й степени из β . Пусть η — любой такой корень (элементы η , η' лежат в некотором фиксированном поле разложения многочлена $y^n - \beta$).

С л у ч а й 1. Если степень $F(\eta)$ над F равна $d < p$, мы покажем, что в F уже есть некоторый корень η' степени p из β . Действительно, положив $ip + jd = 1$, выберем

$$\eta' = \beta^i \operatorname{norm}_{F(\eta)/F}(\eta^j).$$

Подсчет $\beta^{ip} \operatorname{norm} \eta'^p = \beta^{ip} \operatorname{norm} \beta^j = \beta^{ip+jd} = \beta$

показывает, что η' — действительно корень из β степени p . Очевидно, α является нормой элемента из поля $F(\eta') = F$.

С л у ч а й 2. Если степень $F(\eta)$ над F равна p , мы воспользуемся полем E , которое получается присоединением к F корней из единицы степени p . Пусть $d < p$ — степень E над F .

Так как из $\{\alpha, \beta\}$ извлекается корень степени p в группе K_2F , образ этого элемента в K_2E тоже является p -й степенью. Пользуясь 15.11, находим, что α является нормой из $E(\eta)$ в E . Следовательно, коммутативная диаграмма норменных гомоморфизмов

$$\begin{array}{ccc} E(\eta)^\cdot & \rightarrow & E^\cdot \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(\eta)^\cdot & \rightarrow & F^\cdot \end{array}$$

показывает, что $\operatorname{norm}_{E/F} \alpha = \alpha^d$ является нормой некоторого элемента $\xi \in F(\eta)^\cdot$. Полагая $ip + jd = 1$, находим, что α является нормой элемента $\alpha^i \xi^j \in F(\eta)^\cdot$.

Таким образом, для каждого простого числа p_k , делящего n , мы можем найти корень степени p_k из β , скажем, η_k , такой, что α является нормой из $F(\eta_k)$. Степень $F(\eta_k)$ над F равна либо 1, либо p_k . Поскольку эти степени взаимно простые, отсюда легко следует, что α является нормой некоторого элемента из композита полей $F(\eta_1, \dots, \eta_r) = F(\eta_1 \dots \eta_r)$. Но этот композит является прямым слагаемым кольца $F[y]/(y^n - \beta)$. Следовательно, α является нормой элемента из кольца $F[y]/(y^n - \beta)$.

Так как обратное утверждение было доказано в § 14, это завершает доказательство теоремы 15.12. ■

§ 16. ЧИСЛОВЫЕ ПОЛЯ

Пусть F — конечное расширение поля рациональных чисел, и пусть m — число корней из единицы в поле F . Это означает, что группа $\mu(F)$ всех корней из единицы в F циклическа порядка m .

Мур доказал некоторую теорему единственности для формулы взаимности m -й степени. В этом параграфе мы приведем формулу взаимности и сформулируем теорему Мура без доказательства. (См. 16.1.) В качестве следствия из теоремы Мура мы выведем, что группа $SL(\Lambda)$, где Λ — кольцо целых чисел в F , порождена элементарными матрицами. (Мы дадим также набросок более прямого доказательства этого факта.) Поэтому точная последовательность из § 13 содержит нулевой морфизм:

$$K_2F \rightarrow \bigoplus K_1\Lambda/\mathfrak{p} \xrightarrow{0} K_1\Lambda \rightarrow K_1F \rightarrow \dots$$

Замечание. Басс и Тэйт, а позже Гарланд получили дальнейшую информацию об этой последовательности. Гарланд установил, что если n достаточно велико, то мультипликатор Шура $H_2SL(n, \Lambda)$ конечен. Переходя к прямому пределу при $n \rightarrow \infty$, находим, что $K_2\Lambda$ — периодическая группа. (Деннис недавно установил, что $H_2SL(n, \Lambda)$ отображается на всю группу $H_2SL(n+1, \Lambda)$ при $n \geq 5$, так что группа $K_2\Lambda$ на самом деле конечна.) Далее Гарланд показал, что в точной последовательности $K_2\Lambda \rightarrow K_2F \rightarrow \bigoplus K_1\Lambda/\mathfrak{p} \xrightarrow{0} \dots$ образ группы $K_2\Lambda$ конечен. В случае вполне вещественного поля Берч и Тэйт предположили, что порядок этого конечного образа совпадает со значением дзета-функции поля F в точке -1 , умноженным на количество корней из единицы в расширении $F(\sqrt{F})$, которое получается присоединением к F квадратных корней из всех элементов поля F . Ср. доклад Тэйта на Международном конгрессе математиков в Ницце (Tate J., Symbols in arithmetic, Actes du Congrès Int. Math., vol. I, Gauthier Villars, Paris, 1971, 201—211).

Начнем теперь обсуждать теорему Мура. Пусть v — либо дискретное нормирование поля F (как § 11), либо

одно из архимедовых нормирований, которое продолжает классический модуль $|q| = \max(q, -q)$ на поле рациональных чисел. Тогда пополнение F_v является либо локальным полем, либо вещественным, либо комплексным. В локальном и вещественном случаях группа $\mu(F_v)$ всех корней из единицы в пополнении F_v является конечной циклической. Но в комплексном случае группа $\mu(F_v) \cong \mu(\mathbb{C})$, разумеется, бесконечна. Начиная с этого места, мы будем систематически исключать из рассмотрения комплексный случай и считать, что F_v — либо локальное, либо вещественное поле.

Пусть $m(v)$ — порядок конечной циклической группы $\mu(F_v)$. Символ норменного вычета $(x, y)_v$ степени $m(v)$ — это непрерывный символ Стейнберга для F_v со значениями в $\mu(F_v)$. Определение этого символа можно найти в пп. 15.9, 15.10 и в цитированной там литературе. Исключение комплексного случая существенно: Мур доказал, что любой непрерывный символ Стейнберга для комплексного поля тождественно равен 1. (См. приложение.)

Пусть теперь x и y — ненулевые элементы поля $F \subset \subset F_v$. Чтобы поместить значения всех символов $(x, y)_v$ в общую группу, применим сюръективное отображение

$$\mu(F_v) \rightarrow \mu(F),$$

которое переводит любой корень из единицы ξ в его степень $\xi^{m(v)/m}$. Закон взаимности степени m тогда утверждает, что

$$\prod_v (x, y)_v^{m(v)/m} = 1.$$

(См., например, Artin E., Tate J., Class field theory, Benjamin, 1969, стр. 171, и Алгебраическая теория чисел, под ред. Дж. Касселса и А. Фрелиха, «Мир», М. 1969, стр. 401, 457.) Здесь произведение берется по всем дискретным нормированиям поля F и всем архимедовым нормированиям с $F_v \cong \mathbb{R}$.

Теорема единственности Мура формулируется так. Пусть S^1 — единичная окружность в комплексной плоскости.

Пусть h_v — некоторые гомоморфизмы из $\mu(F_v)$ в S^1 . Предположим, что символы $(x, y)_v$ удовлетворяют соотношению вида

$$\prod_v h_v((x, y)_v) = 1$$

для всех x и y в F . Тогда существует такой гомоморфизм h_v из $\mu(F_v)$ в S^1 , что

$$h_v(\xi) = h(\xi^{m(v)/m})$$

для всех v .

За доказательством мы отсылаем читателя к работе Moore С., Group extensions of p -adic and adelic linear groups, *Publ. Math. IHES*, 35, Theorem 7.4.

Разумеется, верно и обратное: для всякого гомоморфизма $h: \mu(F) \rightarrow S^1$, если мы положим $h_v(\xi) = h(\xi^{m(v)/m})$, ясно, что произведение всех $h_v((x, y)_v)$ равно единице. Поэтому, пользуясь леммой 11.3, мы можем коротко сформулировать утверждение Мура как доказательство точности последовательности

$$(1) \quad \text{Hom}(\mu(F), S^1) \rightarrow \text{Hom}(\bigoplus_v \mu(F_v), S^1) \rightarrow (K_2F, S^1).$$

Другая совершенно эквивалентная формулировка такова:

ТЕОРЕМА единственности 16.1. Последовательность

$$K_2F \rightarrow \bigoplus_v \mu(F_v) \rightarrow \mu(F) \rightarrow 1$$

точна. Здесь первый гомоморфизм переводит каждую образующую $\{x, y\}$ группы K_2F в элемент, v -я компонента которого равна символу норменного вычета $(x, y)_v$ степени $m(v)$. Второй гомоморфизм переводит каждый элемент $\{\xi_v\}$ в произведение $\prod_v \xi_v^{m(v)/m}$. Здесь v пробегает все дискретные нормирования и все архимедовы нормирования с $F_v \cong \mathbb{R}$.

Доказательство. Так как группа S^1 инъективна и содержит элементы всех порядков, точность этой последовательности вполне эквивалентна точности двойственной последовательности (1). Это завершает доказательство. ■

Вот одно приложение теоремы 16.1.

Следствие 16.2. Пусть Λ — любое дедекиндово кольцо, поле частных которого является конечным расширением поля рациональных чисел. Тогда гомоморфизм

$$d: K_2F \rightarrow \bigoplus K_1\Lambda/\mathfrak{p}$$

из леммы 13.8 сюръективен.

Например, Λ здесь можно быть кольцом алгебраических чисел в F .

Доказательство. Заметим, что любой ненулевой простой идеал $\mathfrak{p} \subset \Lambda$ индуцирует вполне определенное $\mathfrak{p}$ -адическое нормирование поля F . Пусть $F_{\mathfrak{p}}$ есть $\mathfrak{p}$ -адическое пополнение, а $m(\mathfrak{p})$ — порядок группы $\mu(F_{\mathfrak{p}})$.

Ручной символ, определенный в п. 11.5, который мы использовали для определения гомоморфизма $K_2F \rightarrow \bigoplus K_1\Lambda/\mathfrak{p}$, можно представить в виде образа символа норменного вычета $(x, y)_{\mathfrak{p}}$ степени $m(\mathfrak{p})$ при подходящем сюръективном отображении

$$\psi_{\mathfrak{p}}: \mu(F_{\mathfrak{p}}) \rightarrow K_1\Lambda/\mathfrak{p}.$$

(Ср. Serre, J.-P., Corps Locaux, стр. 217, или Artin E., Tate J., стр. 170. В приложении будет доказано, что на самом деле любой непрерывный символ Стейнберга для локального поля является образом символа норменного вычета при подходящем гомоморфизме.) Доказательство 16.2 проводится теперь так.

Случай 1. Предположим, что никакое рациональное простое число не обратимо в Λ . (Например, это так, если Λ совпадает с кольцом целых чисел в F .) Начнем с произвольного элемента $\{x_{\mathfrak{p}}\}$ прямой суммы $\bigoplus K_1\Lambda/\mathfrak{p}$. Выберем набор корней из единицы $\xi_{\mathfrak{p}}$ в $\mu(F_{\mathfrak{p}})$, из которых почти все равны 1, с условием $\psi_{\mathfrak{p}}(\xi_{\mathfrak{p}}) = x_{\mathfrak{p}}$. Он составляет элемент прямой суммы $\{\xi_{\mathfrak{p}}\} \in \bigoplus \mu(F_{\mathfrak{p}})$. Рассмотрим произведение

$$\xi = \prod \xi_{\mathfrak{p}}^{m(\mathfrak{p})/m}$$

в $\mu(F)$. Мы постараемся превратить ξ в 1, меняя выбор ξ_p в случае нужды.

Пусть q — любое рациональное простое число, делящее $m = |\mu(F)|$, и пусть $\mathfrak{q}$ — любой простой идеал кольца Λ , содержащий q . Тогда порядок циклической группы $K_1\Lambda/\mathfrak{q}$ взаимно прост с q , так что сюръекция

$$\psi_{\mathfrak{q}}: \mu(F_{\mathfrak{q}}) \rightarrow K_1\Lambda/\mathfrak{q}$$

обращает в нуль q -примарную компоненту циклической группы $\mu(F_{\mathfrak{q}})$. Но $\mu(F_{\mathfrak{q}})$ отображается на $\mu(F)$. Поэтому изменив q -примарную компоненту $\xi_{\mathfrak{q}}$, мы можем уничтожить q -примарную компоненту произведения $\xi = \prod \xi_p^{m(p)/m}$, не изменив остальных примарных компонент.

Повторяя эту процедуру для каждого простого делителя числа m , мы обнаруживаем, что любой элемент $\{x_p\}$ группы $\bigoplus K_1\Lambda/\mathfrak{p}$ можно поднять до элемента $\{\xi_p\}$ группы $\bigoplus \mu(F_p)$, удовлетворяющего условию

$$\prod_p \xi_p^{m(p)/m} = 1.$$

Следовательно, пользуясь 16.1, мы можем поднять $\{x_p\}$ до некоторого элемента группы K_2F . Это завершает доказательство в случае 1.

С л у ч а й 2. Предположим, что некоторое дискретное нормирование v_0 поля F не является p -адическим нормированием ни для какого простого идеала $\mathfrak{p} \subset \Lambda$. Выбрав $\{\xi_p\}$, как выше, мы можем затем подобрать элемент ξ_{v_0} группы $\mu(F_{v_0})$ так, чтобы произведение

$$\xi_{v_0}^{m(v_0)/m} \prod_p \xi_p^{m(p)/m}$$

было равно 1. Доказательство затем продолжается, как в случае 1.

Ясно, что случаи 1 и 2 исчерпывают все возможности. Действительно, если некоторое рациональное простое число p является единицей в Λ , то p -адическое нормирование поля рациональных чисел продолжается до нормирования v_0 , которое упомянуто в случае 2. Это завершает доказательство следствия 16.2. ■

Рассмотрим теперь последовательность

$$K_2F \rightarrow \bigoplus K_1\Lambda/\mathfrak{p} \rightarrow K_1\Lambda \rightarrow K_1F \rightarrow \dots$$

из § 13. Мы показали, что первый гомоморфизм сюръективен, если F — числовое поле. Так как композиция первых двух гомоморфизмов является нулевой в силу 13.8, это показывает, что второй гомоморфизм последовательности нулевой. Но образом второго гомоморфизма является подгруппа

$$SK_1\Lambda = SL(\Lambda)/E(\Lambda).$$

Это доказывает

Следствие 16.3. *Если Λ — дедекиндово кольцо, поле частных которого конечно над полем рациональных чисел, то $SK_1\Lambda = 0$. Иными словами, бесконечномерная специальная линейная группа $SL(\Lambda)$ порождена элементарными матрицами.*

Замечание. Отсюда следует, что $SL(n, \Lambda)$ порождена элементарными матрицами для всех $n \geq 3$. Действительно, в работах: Bass H., Milnor J., Serre J.-P., Solution of the congruence subgroup problem for SL_n ($n \geq 3$) and Sp_{2n} ($n \geq 2$), *Publ. Math. IHES*, 33 (1967), 50—137; Басс Х., Алгебраическая K -теория, «Мир», М., 1973, стр. 190—197, и Вассерштейн Л. Н., О стабилизации общей линейной группы над кольцом, *Мат. сб.*, 79, в. 3 (1969), 405—424, стр. 409, доказано, что для любого дедекиндова кольца Λ и любого целого числа $n \geq 3$ подгруппа

$$E(n, \Lambda) \subset SL(n, \Lambda)$$

нормальна, а факторгруппа по ней изоморфна $SK_1\Lambda$. (Соответствующий результат для $n = 2$ неверен. Например, если $\Lambda = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, то, как показал Суон, подгруппа $E(2, \Lambda) \subset SL(2, \Lambda)$ не является нормальной, а порожденная ею нормальная подгруппа имеет бесконечный индекс в $SL(2, \Lambda)$. (См. Swan R. G., Generators and relations for certain special linear groups, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 74 (1968), 576—582, или Prospects in Mathematics, *Annals of Math. Studies*, 70, Princeton University Press, 1971).

Если Λ совпадает с кольцом целых алгебраических чисел в F , то можно дать следующее прямое доказательство следствия 16.3. (Ср. цитированную выше работу Басса, Милнора и Серра, стр. 77.)

Другое доказательство. Мы воспользуемся классической теоремой Гурвица о том, что группа $SL(2, \Lambda)$ конечно порождена, если Λ — кольцо целых чисел в числовом поле F . (См. Hurwitz A., Die unimodularen Substitutionen in einem algebraischen Zahlkörper, Math. Werke, Bd. 2, Basel, Burkhauser 1933, 244—268.) Так как $SL(2, \Lambda)$ отображается на всю группу $SL(\Lambda)/E(\Lambda) = SK_1\Lambda$ в силу п. 13.6, отсюда следует, что абелева группа $SK_1\Lambda$ конечно порождена. На самом деле $SK_1\Lambda$ конечна. Действительно, для любой образующей $\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}$ мы можем выбрать такое целое число $r > 0$, что $b^r \equiv 1 \pmod{a}$, откуда $\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}^r = 1$ (воспользоваться п. 13.2).

Предположим сначала, что Λ содержит p -е корни из единицы, где p — некоторое простое число. Мы покажем, что у конечной группы $SK_1\Lambda$ нет p -кручения. Очевидно, достаточно проверить, что каждый символ Менникке $\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}$ является p -й степенью в $SK_1\Lambda$.

В силу китайской теоремы об остатках элемент a сравним $\pmod{\Lambda b}$ с некоторым элементом a_1 , взаимно простым с p . Действительно, достаточно выбрать a_1 так, чтобы $a_1 \equiv a \pmod{b}$ и $a_1 \equiv 1 \pmod{p}$ для всех простых идеалов $\mathfrak{p}$, делящих p , но не b . Тогда $\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ a_1 \end{bmatrix}$.

Мы воспользуемся символами норменных вычетов $(x, y)_{\mathfrak{v}} \in \mu_p$ степени p и формулой взаимности $\prod_{\mathfrak{v}} (x, y)_{\mathfrak{v}} = 1$. Выбрав некоторый простой идеал $\mathfrak{q}$, делящий p , отметим следующий факт.

УТВЕРЖДЕНИЕ. В $\mathfrak{q}$ -адическом пополнении кольца Λ существуют такие две единицы u_0 и w_0 , что символ норменного вычета $(u_0, w_0)_{\mathfrak{q}}$ степени p нетривиален,

Доказательство. Пусть $U = \Lambda_q^*$ — группа единиц этого пополнения. Так как U содержит корни из единицы степени p , а p совпадает с характеристикой поля классов вычетов, индекс подгруппы $U^p \subset U$ не меньше p^2 . (См. П. 5 приложения или Lang S., Algebraic Number Theory, Addison-Wesley, стр. 47.) Обозначим через π некоторый простой элемент кольца Λ_q (т. е. $v_q(\pi) = 1$). Индекс подгруппы $U_0 \subset U$, состоящей из всех элементов u с $(u, \pi)_q = 1$, не больше p . Поэтому существует элемент $u_0 \in U_0$, из которого не извлекается корень степени p в F_q^* . Отсюда следует, что

$$(u_0, y)_q \neq 1$$

для некоторого элемента $y \in F_q^*$. (Ср. Serre J.-P., Corps, Лосаих, стр. 215. Это утверждение легко вытекает из следствия 15.10 или из П. 13.) Положив $y = \pi^i \omega_0$, находим $(u_0, \omega_0)_q \neq 1$.

Другое доказательство следствия 16.3 проходит теперь так. В силу китайской теоремы об остатках существует элемент b_2 , для которого

$$b_2 \equiv b \pmod{a_1},$$

$$b_2 \equiv \omega_0 \pmod{q^N},$$

$$b_2 \equiv 1 \pmod{p^N} \text{ для всех } p \mid p \text{ с } p \neq q.$$

Здесь целое число N должно быть настолько большим, чтобы элемент b_2/ω_0 был p -й степенью в пополнении F_q и чтобы b_2 был p -й степенью в F_p для всех $p \neq q$, делящих p . (Ср. П. 4.)

Теперь мы используем следующее обобщение теоремы Дирихле. Арифметическая прогрессия, состоящая из всех b_2 , удовлетворяющих указанным сравнениям, содержит «простой» элемент в том смысле, что порожденный им идеал Λb_2 прост. (См., например, Hasse H., Zahlbericht, Jahresberichte Deut. Math. Ver., 35 (1926), § 8.) Далее, этот простой элемент b_2 можно выбрать так, что он будет положителен в любом вещественном пополнении поля F .

Заметим теперь, что символ норменного вычета $(u_0, b_2)_q$ степени p равен $(u_0, \omega_0)_q \neq 1$. Следовательно, существует такая степень $u = (u_0)^i$, что удовлетворяется равенство

$$(a_1, b_2)_{\Lambda b_2} (u, b_2)_q = 1.$$

Выберем «простой элемент» a_3 так, чтобы

$$a_3 \equiv a_1 \pmod{b_2},$$

$$a_3 \equiv u \pmod{q^N}$$

с тем же N , что и выше. Тогда

$$\begin{bmatrix} b_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_2 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим теперь формулу взаимности

$$\prod_v (a_3, b_2)_v = 1.$$

Символы $(a_3, b_2)_v$, отвечающие вещественным пополнениям или простым $p \neq q$, которые делят p , тривиальны в силу выбора b_2 . Для любого простого r , не делящего p , символ $(a_3, b_2)_r$ является гомоморфным образом ручного символа из п. 11.5 (ср. П. 8 или Corps Locaux, стр. 217). Следовательно, он может быть нетривиален, только если r делит a_3 или b_2 . Таким образом, формула взаимности сводится к следующей:

$$(a_3, b_2)_{\Lambda a_3} (a_3, b_2)_{\Lambda b_2} (a_3, b_2)_q = 1.$$

Но последние два множителя этого произведения равны $(a_1, b_2)_{\Lambda b_2}$ и $(u, b_2)_q$ соответственно, и их произведение равно 1. Поэтому

$$(a_3, b_2)_{\Lambda a_3} = 1,$$

а это означает, что b_2 сравним с p -й степенью по модулю a_3 . Пусть

$$b_2 \equiv x^p \pmod{a_3},$$

тогда

$$\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ a_3 \end{bmatrix}^p.$$

Таким образом, если F содержит p -е корни из единицы, то каждый символ Менникке является p -й степенью, так что $SK_1\Lambda$ не имеет p -кручения. Предположим теперь, что F не содержит p -х корней из единицы. Пусть Γ — кольцо целых чисел в расширении $F(e^{2\pi i/p})$. Рассмотрим гомоморфизм $\iota_*: K_1\Lambda \rightarrow K_1\Gamma$, индуцированный вложением, и гомоморфизм переноса $\iota^*: K_1\Gamma \rightarrow K_1\Lambda$ и напомним, что композиция

$$\iota^* \circ \iota_*: K_1\Lambda \rightarrow K_1\Lambda$$

отвечает умножению на элемент

$$\iota^*[\Gamma] \in K_0\Lambda.$$

Очевидно, $\iota^*[\Gamma] = d + \gamma$, где d — степень $F(e^{2\pi i/p})$ над F , а $\gamma \in \tilde{K}_0\Lambda$ — проективный класс Γ над Λ .

Таким образом, если мы начнем с элемента α порядка p в $SK_1\Lambda$, то $\iota_*(\alpha)$ имеет порядок p в $SK_1\Gamma$, так что $\iota_*(\alpha) = 0$. Следовательно, $(d + \gamma)\alpha = 0$, откуда

$$d^2\alpha = (d - \gamma)(d + \gamma)\alpha$$

(использовать п. 1.11). Но d взаимно просто с p . Поэтому $\alpha = 0$.

Следовательно, конечная группа $SK_1\Lambda$ не имеет p -кручения ни для какого простого числа p . Таким образом, $SK_1\Lambda = 0$. Это завершает наше второе доказательство. ■

ПРИЛОЖЕНИЕ

НЕПРЕРЫВНЫЕ СИМВОЛЫ СТЕЙНБЕРГА

Кэлвин Мур дал полное описание непрерывных символов Стейнберга для классических локально компактных полей. Если F — либо локальное поле, либо поле вещественных чисел, то любой непрерывный символ Стейнберга на F является гомоморфным образом символа норменного вычета степени m , где m — число корней из единицы в F . С другой стороны, для поля комплексных чисел $\mathbb{C}$ любой непрерывный символ Стейнберга тривиален. В приложении мы докажем эти факты. Следующего условия непрерывности нам будет достаточно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Символ Стейнберга c для топологического поля F называется *слабо непрерывным*, если для каждого $\beta \in F^\cdot$ его аннулятор, состоящий из всех α с $c(\alpha, \beta) = 1$, замкнут в $F^\cdot$.

Топология группы значений A никак в этом определении не участвует. Однако если A — хаусдорфово пространство и функция

$$c: F^\cdot \times F^\cdot \rightarrow A$$

непрерывна, символ c , очевидно, слабо непрерывен.

Вещественные и комплексные поля

Рассмотрим сначала некоторый символ Стейнберга $c(\alpha, \beta)$ для поля R вещественных чисел. Тождества

$$c(3, -2) = c(3, -3) = 1$$

показывают, что $c(3, \beta) = 1$ для любого рационального числа β вида $(-2)^i (-3)^j$. Но множество всех таких рациональных чисел, очевидно, является плотной подгруппой в $R^\cdot$. Поэтому из слабой непрерывности символа Стейнберга c следует, что $c(3, \beta) = 1$ для всех $\beta \in R^\cdot$. Аналогично тождества

$$c(4, -3) = c(4, -4) = 1$$

показывают, что $s(4, \beta) = 1$ для всех β . Но любое положительное вещественное число можно как угодно хорошо приблизить произведением $3^i 4^j$. Отсюда следует, что $s(\alpha, \beta) = 1$ для всех $\alpha > 0$. Очевидно, это доказывает следующий факт.

ТЕОРЕМА П.1. Пусть $s(\alpha, \beta)$ — слабо непрерывный символ Стейнберга для поля R вещественных чисел. Тогда $s(\alpha, \beta) = 1$, если α или β положительны, а порядок элемента

$$s(\alpha, \beta) = s(-1, -1)$$

не больше 2, если α и β оба отрицательны.

Иными словами, $s(u, v)$ является образом квадратичного символа норменного вычета $(u, v)_R$ относительно гомоморфизма $\{\pm 1\} \rightarrow A$, который переводит $(-1, -1)_R$ в $s(-1, -1)$.

Следствие П.2. Любой слабо непрерывный символ Стейнберга для комплексного поля тривиален.

Действительно, пусть ω — некоторый корень из единицы, скажем $\omega^n = 1$. Тогда из любого элемента $\beta \in \mathbb{C}$ можно извлечь корень n -й степени, $\beta = \gamma^n$, и заключить, что

$$s(\omega, \beta) = s(\omega, \gamma^n) = s(\omega^n, \gamma) = 1.$$

Слабая непрерывность показывает, что тогда $s(\omega', \beta) = 1$ для любого числа ω' на единичной окружности. Значит, для всех α

$$s(\alpha, \beta) = s(|\alpha|, \beta) = s(|\alpha|, |\beta|) = 1$$

(воспользоваться П.1), что завершает доказательство. ■

Локальные поля

Предположим теперь, что поле F полно относительно дискретного нормирования v с полем классов вычетов $\bar{F}$. Пусть Λ — кольцо нормирования поля F , а $\mathfrak{P} = \Lambda \setminus \Lambda^\times$ — простой идеал. Число элементов в $\bar{F} = \Lambda/\mathfrak{P}$ обозначим символом $q = p^f$, где p — простое число. Если характеристика поля F равна нулю, обозначим через $e = v(p)$

индекс ветвления F над полем p -адических чисел. В случае когда F имеет характеристику p , мы полагаем $e = v(0) = +\infty$.

Начнем с некоторых хорошо известных свойств мультипликативной группы $F^\bullet$. Для каждого $i \geq 1$ положим

$$U_i = 1 + \mathfrak{P}^i.$$

Это подгруппа группы $F^\bullet$, состоящая из всех элементов, сравнимых с единицей $\bmod \mathfrak{P}^i$. Заметим, что факторгруппа U_i/U_{i+1} изоморфна аддитивной группе поля классов вычетов. Обозначим через $\mu_{q-1} \subset \Lambda^\bullet$ циклическую группу, состоящую из всех корней из единицы степени $q-1$. Пусть π — некоторая образующая простого идеала $\mathfrak{P}$. (Иными словами, $v(\pi) = 1$.)

Лемма П.3. *Каждый элемент группы $F^\bullet$ однозначно записывается в виде произведения $\pi^i \eta u_1$, где η лежит в циклической группе μ_{q-1} порядка $q-1$, а u_1 лежит в U_1 . Если n взаимно просто с p , то из любого элемента U_i однозначно извлекается корень степени n в U_i .*

Доказательство. Последнее утверждение следует из того, что U_i — «про- p -группа», т. е. проективный предел последовательности

$$U_i/U_{i+1} \leftarrow U_i/U_{i+2} \leftarrow U_i/U_{i+3}$$

конечных p -групп. В частности, отсюда видно, что из каждого элемента U_1 однозначно извлекается корень степени $q-1$. Значит, точная последовательность

$$1 \rightarrow U_1 \rightarrow \Lambda^\bullet \rightarrow (\Lambda/\mathfrak{P})^\bullet \rightarrow 1$$

однозначно расщепляется. Оставшаяся часть доказательства очевидна.

Вопрос о корнях степени p труднее. Удобно положить $e_0 = e/(p-1)$. Мы будем говорить, что F содержит p -е корни из единицы, если F содержит p разных таких корней.

Лемма П.4. *Отображение $u \rightarrow u^p$ индуцирует некоторый изоморфизм $U_i \rightarrow U_{i+e}$ для $i > e_0$. Если $i = e_0$, то этот гомоморфизм*

$$U_{e_0} \rightarrow U_{e_0+e} = U_{pe_0}$$

либо имеет ядро и коядро порядка p , либо является изоморфизмом в соответствии с тем, содержит F p -е корни из единицы или нет. Наконец, при $i < e_0$ отображение $u \rightarrow u^p$ индуцирует изоморфизм

$$U_i/U_{i+1} \rightarrow U_{pi}/U_{pi+1}.$$

Доказательство. Выберем некоторую образующую π простого идеала $\mathfrak{P}$. Если $i > e_0$, так что $pi > i + e$, то биномиальное разложение доставляет сравнение

$$(1 + \pi^i \alpha)^p \equiv 1 + p\pi^i \alpha \pmod{U_{i+e+1}}.$$

Следовательно, возведение в степень p индуцирует изоморфизм

$$U_i/U_{i+1} \rightarrow U_{i+e}/U_{i+e+1}.$$

Несложное рассуждение методом последовательных приближений показывает, что из любого элемента группы U_{i+e} однозначно извлекается корень степени p в U_i .

Замечание П. 5. Сравнивая гомоморфизм p -й степени $U_1 \rightarrow U_1$ с соответствующим гомоморфизмом $U_1/U_i \rightarrow U_1/U_{i+e}$ для больших i , мы заключаем, что коядро U_1/U_1^p имеет порядок либо p^{ef+1} , либо p^{ef} в зависимости от того, содержит F p -е корни из единицы или нет. (Ср. Lang S., Algebraic Number Theory, стр. 47.) Если характеристика поля F равна p , то коядро бесконечно.

Продолжим доказательство П. 4. Если $i < e_0$, то

$$(1 + \pi^i \alpha)^p \equiv 1 + \pi^{pi} \alpha^p \pmod{U_{pi+1}}.$$

Так как отображение $\alpha \rightarrow \alpha^p$ индуцирует некоторый автоморфизм поля классов вычетов, мы получаем индуцированный изоморфизм

$$U_i/U_{i+1} \rightarrow U_{pi}/U_{pi+1}.$$

Пусть, наконец, $i = e_0$. Ядро и коядро гомоморфизма p -й степени $U_{e_0} \rightarrow U_{e_0+e}$ можно отождествить с ядром и коядром индуцированного гомоморфизма

$$U_{e_0}/U_{e_0+1} \rightarrow U_{e_0+e}/U_{e_0+e+1}.$$

Но это конечные группы одинакового порядка, поэтому

ядро и коядро тоже имеют равные порядки. Так как ядро состоит из корней p -й степени из единицы в U_{e_0} , оно, очевидно, не может иметь порядок, больший p .

Чтобы завершить доказательство, мы должны установить, что примитивный корень из единицы, если он вообще лежит в F , должен принадлежать U_{e_0} . Но иначе он представлял бы элемент, лежащий в ядре отображения

$$U_i/U_{i+1} \rightarrow U_{pi}/U_{pi+1}$$

для некоторого $i < e_0$, что невозможно. Это доказывает П.4. ■

Удобно будет связать с каждым локальным полем F с полем классов вычетов характеристики p некоторое целое число p^s .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если F содержит p -е корни из единицы, то p^s — высшая степень p , делящая p_{e_0} . Если F содержит только тривиальный корень степени p , мы полагаем $p^s = 1$.

Мы будем изучать символы Стейнберга для F с помощью следующего результата, который мы установим. Фиксируем простой элемент π и любое натуральное число n .

Основная лемма П.6. Для каждого элемента $u_n \in U_n$ существует такой элемент $u_{n+1} \in U_{n+1}$, что

$$\{\pi, u_n\}^{p^s} = \{\pi, u_{n+1}\}^{p^s}.$$

Поэтому, начав с любого элемента u_1 , мы можем индуктивно построить последовательно элементы $u_1, u_2, u_3, \dots$, для которых

$$\{\pi, u_1\}^{p^s} = \{\pi, u_2\}^{p^s} = \dots = \{\pi, u_n\}^{p^s}.$$

Иными словами, любой элемент u_1 можно как угодно хорошо приблизить элементами вида u_1/u_n , которые ортогональны к π^{p^s} относительно спаривания $\{ , \}$.

Пусть теперь $c(\alpha, \beta)$ — некоторый слабо непрерывный символ Стейнберга для F . Так как u_1/u_n сходится к u_1 при $n \rightarrow \infty$ и так как

$$c(\pi^{p^s}, u_1/u_n) = 1,$$

из слабой непрерывности вытекает, что

$$c(\pi, u_1)^{p^s} = c(\pi^{p^s}, u_1) = 1.$$

Теперь учтем, что в этом рассуждении можно было бы пользоваться любым простым элементом π вместо π . Так как мультипликативная группа $F^\bullet$ порождена множеством всех таких простых элементов, отсюда вытекает

Следствие П.7. Если символ c слабо непрерывен, то $c(\alpha, u_1)^{p^s} = 1$ для всех $\alpha \in F^\bullet$ и всех $u_1 \in U_1$.

Теперь мы в состоянии дать хорошее качественное описание символа $c: F^\bullet \times F^\bullet \rightarrow A$. Удобно обозначать символом $c(F^\bullet \otimes F^\bullet)$ ту подгруппу группы A , которая порождена элементами $c(\alpha, \beta)$ для всех α и β из $F^\bullet$.

Следствие П.8. Если c слабо непрерывен, то образ $c(F^\bullet \otimes F^\bullet)$ расщепляется в прямую сумму конечной циклической группы A_1 , порядок которой делит $q-1$, и конечной группы A_2 экспоненты p^s (т. е. $a^{p^s} = 1$ для всех $a \in A_2$; определение p^s предшествует П. 6). Существует единственный гомоморфизм $(\Lambda/\mathfrak{P})^\bullet \rightarrow A_1$, который переводит ручной символ $d_v(\alpha, \beta)$ из п.11.5 в A_1 -компоненту элемента $c(\alpha, \beta)$.

Вывод П.8 из П.6. Введем вспомогательный символ Стейнберга d :

$$d(\alpha, \beta) = c(\alpha, \beta)^{p^s}.$$

Из П.7 следует, что для любых u и v из $\Lambda^\bullet$ символ $d(u, v)$ зависит только от образов u и v в поле классов вычетов. Но, согласно 9.9, любой символ Стейнберга для конечного поля тривиален, поэтому $d(u, v) = 1$.

Пусть теперь α и β — элементы из $F^\bullet$. Положим $\alpha = \pi^i \eta u_1$ и $\beta = \pi^j \eta' u'_1$ (ср. П.3); тогда значение

$$d(\alpha, \beta) = d(\pi, \pi)^{ij} d(\eta, \pi)^j d(\pi, \eta')^i$$

равно

$$d((-1)^{ij} \eta^j / \eta'^i, \pi).$$

(Заметим, что $(-1)^{ij}$ лежит в μ_{q-1} или U_1 в зависимости от того, нечетно q или четно.) Следовательно,

$d(\alpha, \beta)$ является образом ручного символа $d_v(\alpha, \beta)$ при гомоморфизме $(\eta \bmod \mathfrak{P}) \mapsto d(\eta, \pi)$

из $(\Lambda/\mathfrak{P})^\times$ в A . В частности, образ группы $d(F^\times \otimes F^\times)$ циклический и его порядок делит $q-1$.

Положим $N = p^s(q-1)$. Тогда $c(\alpha, \beta)^N = d(\alpha, \beta)^{q-1} = 1$ для всех α, β . Так как, согласно П.3 и П.4, индекс подгруппы $(F^\times)^N \subset F^\times$ конечен, мы получаем, что $c(F^\times \otimes F^\times)$ — конечная группа, откуда уже без труда следуют утверждения П.8. ■

Доказательство П.6 будет основано на следующем элементарном замечании.

Лемма П.9. Равенство $\{\pi, (1 - \pi^n \eta^n)\} = 1$ выполняется для всех $\eta \in \mu_{q-1}$ и всех $n \geq 1$.

Действительно, элемент $1 - \pi^n \eta$ является $(q-1)$ -й степенью ω^{q-1} в U_n ; поэтому

$$\{\eta, 1 - \pi^n \eta\} = \{\eta, \omega^{q-1}\} = \{\eta^{q-1}, \omega\} = 1,$$

откуда

$$\{\pi, (1 - \pi^n \eta)^n\} = \{\pi^n, 1 - \pi^n \eta\} = \{\pi^n \eta, 1 - \pi^n \eta\} = 1. \blacksquare$$

Доказательство леммы П.6. Нам будет удобно работать с символом Стейнберга c , который определен равенством

$$c(\alpha, \beta) = \{\alpha, \beta\}^{p^s} \in K_2 F.$$

Мы должны проверить следующее утверждение. Любой элемент $u_n \in U_n$ сравним по модулю U_{n+1} с таким элементом γ , что $c(\pi, \gamma) = 1$. Доказательство использует индукцию по n и перебор четырех случаев.

Случай 1. Если n взаимно просто с p , то из u_n однозначно извлекается корень n -й степени ω в U_n . Мы можем считать, что $\omega \notin U_{n+1}$. (Если $\omega \in U_{n+1}$, то $u_n \in U_{n+1}$, так что можно просто положить $\gamma = 1$.) Записав $1 - \omega$ в виде произведения

$$1 - \omega \in \pi^n \eta U_1$$

с помощью П.3, находим

$$\omega \equiv 1 - \pi^n \eta \bmod U_{n+1}$$

и, значит,

$$u_n = \omega^n \equiv (1 - \pi^n \eta)^n \pmod{U_{n+1}}.$$

Положим $\gamma = (1 - \pi^n \eta)^n$. Равенство $c(\pi, \gamma) = 1$ следует из П.9.

С л у ч а й 2. Если $n \equiv 0 \pmod{p}$ и $n < pe_0$, то мы можем выбрать элемент $\omega \in U_{n/p}$ со свойством

$$\omega^p \equiv u_n \pmod{U_{n+1}}.$$

По индуктивному предположению существует элемент $\gamma \equiv \omega \pmod{U_{(n/p)+1}}$, для которого $c(\pi, \gamma) = 1$. Тогда элемент γ^p обладает нужными свойствами: $\gamma^p \equiv u_n \pmod{U_{n+1}}$ и $c(\pi, \gamma^p) = 1$.

С л у ч а й 3. При $n > pe_0$ доказательство аналогично. Нужно только выбрать элемент $\omega \in U_{n-e}$ с $\omega^p = u_n$ и затем элемент $\gamma \equiv \omega \pmod{U_{n-e+1}}$ с $c(\pi, \gamma) = 1$. Снова имеем тогда $\gamma^p \equiv u_n \pmod{U_{n+1}}$ и $c(\pi, \gamma^p) = 1$.

С л у ч а й 4. При $n = pe_0$ коядро гомоморфизма p -й степени

$$U_{e_0} \rightarrow U_n$$

или тривиально, или является циклической группой порядка p . Если ядро тривиально, мы можем действовать точно как в случаях 2 и 3. Предположим, что F содержит корни p -й степени из единицы, так что коядро нетривиально. Представим $n = pe_0$ в виде $p^s n_1$, где n_1 взаимно просто с p . Выберем образующую коядра и представим ее элементом $\delta_\pi \in U_n$ вида

$$\delta_\pi = (1 - \pi^n \eta)^{n_1},$$

где $\eta \in \mu_{q-1}$. Тогда

$$c(\pi, \delta_\pi) = \{\pi, \delta_\pi\}^{p^s} = 1$$

в силу П.9.

Теперь для данного u_n мы можем выбрать такую степень δ_π^i , что

$$u_n \equiv \delta_\pi^i \pmod{(U_{e_0})^p}.$$

Положив $u_n = \omega^p \delta_\pi^i$ с $\omega \in U_{e_0}$ и отыскав γ с $c(\pi, \gamma) = 1$ и

$$\omega \equiv \gamma \pmod{U_{e_0+1}},$$

как в случаях 2 и 3, мы получим

$$u_n \equiv \gamma^p \delta_\pi^t \pmod{U_{n+1}}$$

и $s(\pi, \gamma^p \delta_\pi^t) = 1$, как и требовалось. Это завершает доказательство леммы П.6. ■

Чтобы получить более точное описание слабо непрерывных символов Стейнберга, нам понадобится несколько лемм о структуре группы $K_2F/(K_2F)^p$.

Предположим, что F содержит p -е корни из единицы, так что гомоморфизм p -й степени

$$U_{e_0} \rightarrow U_{pe_0}$$

имеет коядро порядка p .

Определение. Любой элемент $\delta \in U_{pe_0}$, из которого не извлекается корень p -й степени в U_{e_0} (и, значит, в $F^\cdot$), будет называться *отмеченной единицей* в F .

Лемма П.10. Пусть π — простой элемент, а δ — отмеченная единица. Тогда для любого элемента $u_1 \in U_1$ символ $\{\pi, u_1\}$ сравним с некоторой степенью $\{\pi, \delta\}$ по модулю $(K_2F)^p$.

Доказательство. В точности как в доказательстве П.6, начиная с u_1 , можно индуктивно построить последовательность $u_1, u_2, \dots, u_{pe_0}$ так, что

$$\{\pi, u_1\} = \{\pi, u_2\} = \dots = \{\pi, u_{pe_0}\}.$$

Но u_{pe_0} сравним с некоторой степенью δ по модулю $(F^\cdot)^p$, откуда следует требуемое. ■

Лемма П.11. Если δ — отмеченная единица, то $\{u, \delta\} \equiv 1 \pmod{(K_2F)^p}$ для всех $u \in \Lambda^\cdot$.

Доказательство. (Ср. О'Меара О., Introduction to Quadratic Forms, стр. 165.) Мы покажем, что уравнение

$$\delta x^p + u y^p = 1$$

имеет решение $x, y \in \Lambda$. Отсюда будет следовать, что

$$\{u, \delta\} = \{x, u\}^p \{\delta, y\}^p \{x, y\}^{p^2} \equiv 1,$$

как и требовалось.

Положив $\delta = 1 - \pi^{e_0}v$, выберем $\omega \in \Lambda$ так, чтобы

$$\omega^p \equiv v/u \pmod{\mathfrak{P}},$$

и положим $z = \pi^{e_0}\omega$. Тогда

$$\delta + uz^p \equiv 1 \pmod{\mathfrak{P}^{e_0+1}}.$$

Пользуясь П.4, находим, что уравнение

$$(\delta + uz^p) x^p = 1$$

имеет решение x . Положив теперь $y = zx$, мы получим $\delta x^p + uy^p = 1$, что завершает доказательство.

Комбинируя эти две леммы, получаем

Следствие П.12. *Если F содержит p -е корни из единицы, то группа $K_2F/(K_2F)^p$ циклическа порядка p и порождена классом элемента $\{\pi, \delta\} \pmod{(K_2F)^p}$.*

Доказательство. Существование символа норменного вычета степени p (п. 15.8) влечет нетривиальность группы $K_2F/(K_2F)^p$. Для доказательства циклическости выберем некоторый простой элемент π и рассмотрим любую образующую $\{\alpha, \beta\}$ группы K_2F . Положив $\beta = (-\pi)^i \eta u_1$, как в П.3, мы получим, что символ

$$\{\pi, \beta\} = \{\pi, \eta u_1\} \equiv \{\pi, u_1\} \pmod{(K_2F)^p}$$

сравним с некоторой степенью $\{\pi, \delta\}$ по П.10. Пусть $\alpha = \pi^j u$; взяв πu вместо π в предыдущем рассуждении, мы получим, что $\{\pi u, \beta\}$ сравним с некоторой степенью $\{\pi u, \delta\}$. Но $\{\pi u, \delta\} \equiv \{\pi, \delta\}$ в силу П.11. Отсюда легко следует заключение. ■

По-прежнему предполагая, что F содержит p -е корни из единицы, мы докажем следующий факт:

Лемма П.13. *Если β не является p -й степенью в F , то в F существует такой элемент α , что $\{\alpha, \beta\} \not\equiv 1 \pmod{(K_2F)^p}$.*

Доказательство. Это утверждение немедленно следует из стандартных свойств символа норменного вычета степени p , описанных в п.15.10. (Ср. Serre J.-P., Corps locaux, стр. 215.) Можно также дать следующее

прямое доказательство. (Ср. цитированную выше книгу О'Миры, стр. 166.) Положим $\beta = \pi^i u$ с $u \in \Lambda^\cdot$.

Случай 1. Если значение $v(\beta) = i$ не делится на p , то

$$\{\delta, \beta\} = \{\delta, \pi^i\} \not\equiv 1$$

в силу П.11 и П.12.

Случай 2. Если $i \equiv 0 \pmod{p}$, то $\beta \equiv u \pmod{(F^\cdot)^p}$. Действительно, полагая $u = \eta u_1$, имеем

$$\beta \equiv u_1 \pmod{(F^\cdot)^p}.$$

Обозначим через n наибольшее целое число, которое обладает следующим свойством:

$$\beta \equiv u_n \pmod{(F^\cdot)^p}$$

для некоторого u_n в U_n . Такое число существует и удовлетворяет неравенству $n \leq pe_0$. Действительно, если бы написанное сравнение удовлетворялось для какого-то $n > pe_0$, из П.4 следовало бы, что β является p -й степенью, что противоречит предположению.

Если $n = pe_0$, то u_n должно быть отмеченной единицей. Положив $\alpha = \pi$, находим

$$\{\pi, \beta\} \equiv \{\pi, u_n\} \not\equiv 1,$$

что и требовалось.

Итак, пусть $0 < n < pe_0$. Число n не может делиться на p , ибо иначе в силу П.4 элемент u_n был бы сравним с некоторым u_{n+1} по модулю $(F^\cdot)^p$. Положим

$$\alpha = 1 - u_n/\delta.$$

Тогда $\{\alpha, u_n/\delta\} = 1$ и

$$v(\alpha) = n \not\equiv 0 \pmod{p},$$

откуда следует, что

$$\{\alpha, \beta\} \equiv \{\alpha, u_n\} = \{\alpha, \delta\} \equiv \{\pi^n, \delta\} \not\equiv 1,$$

как в случае 1. Это доказывает лемму П. 13. ■

Пусть теперь F — любое локальное поле, а m — число корней из единицы в F .

Теорема П. 14 (Мур). Группа K_2F является прямой суммой циклической группы, порядок которой равен m , и делимой группы $(K_2F)^m$. Символ Стейнберга $s: F^\bullet \times F^\bullet \rightarrow A$ слабо непрерывен в том и только том случае, когда соответствующий гомоморфизм $K_2F \rightarrow A$ аннулирует подгруппу $(K_2F)^m$.

Таким образом, если s слабо непрерывен, то образ $s(F^\bullet \otimes F^\bullet)$ является циклической группой, порядок которой делит m . Обратно, если группа $s(F^\bullet \otimes F^\bullet)$ конечна, то s слабо непрерывен.

Символ норменного вычета $(\alpha, \beta)_F \in \mu_m$ степени m , очевидно, индуцирует сюръективный гомоморфизм $K_2F/(K_2F)^m \rightarrow \mu_m$. Поэтому любой слабо непрерывный символ является гомоморфным образом символа $(\alpha, \beta)_F$.

Доказательство П.14. Пусть $s(\alpha, \beta)$ слабо непрерывен. Согласно П.8, образ $s(A \otimes A)$ расщепляется в прямую сумму $A_1 \oplus A_2$, где A_1 циклическа порядка $q-1$, а A_2 конечна экспоненты p^s . Эта p -примарная компонента A_2 ненулевая лишь в том случае, когда F содержит корни p -й степени из единицы. Но в этом случае $K_2F/(K_2F)^p$ циклическа в силу П.12. Отсюда, очевидно, следует, что и $K_2F/(K_2F)^{p^s}$ циклическа, так что ее гомоморфный образ A_2 циклическа. Тем самым образ $s(F^\bullet \otimes F^\bullet)$ является конечной циклической группой порядка, делящего $p^s(q-1)$.

Чтобы получить более точную верхнюю границу для порядка в случае $p^s \neq 1$, поступим следующим образом. Пусть ξ — примитивный корень из единицы степени m . Предположим, что $p \mid m$, так что ξ не может быть p -й степенью в $F^\bullet$. В силу П.13 существует такой элемент α_0 , что

$$\{\alpha_0, \xi\} \not\equiv 1 \pmod{(K_2F)^p}.$$

Из П.12 следует, что символ $\{\alpha_0, \xi\}$ должен порождать K_2F по модулю $(K_2F)^p$. Отсюда немедленно вытекает, что $\{\alpha_0, \xi\}$ порождает K_2F по модулю $(K_2F)^{p^s}$. Значит, p -примарная компонента $s(\alpha_0, \xi)$ порождает группу $A_2 \subset s(F^\bullet \otimes F^\bullet)$. Так как $s(\alpha_0, \xi)^m = s(\alpha_0, \xi^m) = 1$, отсюда вытекает, что $(A_2)^m = 1$ и, значит, $s(\alpha, \beta)^m = 1$ для всех α и β .

Доказательство делимости группы $(K_2F)^m$. Пусть сначала r — любое простое число, отличное от характеристики F . (Если характеристика F равна нулю, то r может быть любым простым числом.) В силу П.3 и П.4 подгруппа $(F^\cdot)^{rm} \subset F^\cdot$ открыта. Поэтому символ $\{\alpha, \beta\} \bmod (K_2F)^{rm}$ локально постоянен как функция от α и β и потому слабо непрерывен. Приведенные выше рассуждения тогда показывают, что

$$\{\alpha, \beta\}^m \equiv 1 \bmod (K_2F)^{rm}.$$

Тем самым любая образующая $\{\alpha, \beta\}^m$ группы $(K_2F)^m$ является r -й степенью в $(K_2F)^m$.

Предположим теперь, что характеристика поля F равна p . Мы должны доказать, что тогда любой элемент из K_2F является p -й степенью. Поле F изоморфно полю формальных степенных рядов от одной переменной π над конечным полем. Рассмотрим несепарабельное расширение $E = F(\sqrt[p]{\pi})$ степени p над F . Очевидно, у каждого элемента из F есть ровно один корень степени p в E . Иными словами, норменный гомоморфизм из $E^\cdot$ в $F^\cdot$,

$$\text{norm}(\varepsilon) = \varepsilon^p,$$

биективен. Рассмотрим любую образующую $\{\alpha, \beta\}$ группы K_2F . Если β является p -й степенью в F , то, конечно, $\{\alpha, \beta\} \equiv 1 \bmod (K_2F)^p$. Но поле $F(\sqrt[p]{\beta})$ изоморфно E . Поэтому α является нормой из $F(\sqrt[p]{\beta})$ и из п. 14.3 следует, что $\{\alpha, \beta\} \equiv 1 \bmod (K_2F)^p$. Таким образом, каждая образующая группы K_2F является p -й степенью, откуда следует, что каждый элемент группы $(K_2F)^m$ является p -й степенью.

Итак, группа $(K_2F)^m$ делима и точная последовательность

$$1 \rightarrow (K_2F)^m \rightarrow K_2F \rightarrow K_2F/(K_2F)^m \rightarrow 1$$

очевидно, расщепляется. Последняя группа циклична, так как символ $\{\alpha, \beta\} \bmod (K_2F)^m$ слабо непрерывен. Пользуясь символом норменного вычета степени m , убеждаемся, что его порядок точно равен m . Это завершает доказательство. ■

Следствие П. 15 (Басс, Тэйт). Если $E \supset F$ — локальные поля, то гомоморфизм переноса $\iota^*: K_2E \rightarrow K_2F$ сюръективен.

(Заметим по контрасту, что перенос $K_2C \rightarrow K_2R$ заведомо не сюръективен.)

Доказательство. Сначала предположим, что расширение $E \supset F$ вполне неабелево, т. е. что никакое промежуточное поле, кроме F , не является полем Галуа над F с абелевой группой Галуа. Из локальной теории полей классов тогда следует, что норменный гомоморфизм $E^\bullet \rightarrow F^\bullet$ сюръективен. (См., например, Serre J.-P., Corps locaux, стр. 180, Алгебраическая теория чисел, под ред. Касселса и Фрелиха, стр. 222.) Пользуясь тождеством

$$\iota^* \{ \epsilon, \iota(\beta) \} = \{ \text{norm}(\epsilon), \beta \},$$

доказанным в § 14, получаем, что гомоморфизм $\iota^*: K_2E \rightarrow K_2F$ также сюръективен.

Предположим теперь, что E — абелево расширение поля F простой степени r , где r делит число корней из единицы в F . Тогда факторгруппа $F^\bullet / (F^\bullet)^r$ содержит не меньше r^2 различных элементов. Но, согласно локальной теории полей классов, факторгруппа

$$F^\bullet / \text{norm}(E^\bullet)$$

циклическа порядка r . Следовательно, существует такая норма $\text{norm}(\epsilon)$, которая не является r -й степенью в $F^\bullet$. Выберем β так, чтобы

$$\{ \text{norm}(\epsilon), \beta \} \not\equiv 1 \pmod{(K_2F)^r}.$$

(Если r совпадает с характеристикой поля классов вычетов, это возможно в силу П. 13; в противном случае существование такого β следует без труда из 11.5.) Тождество $\iota^* \{ \epsilon, \iota(\beta) \} = \{ \text{norm}(\epsilon), \beta \}$ показывает, что перенос сюръективен по модулю $(K_2F)^r$, а тождество

$$\iota^* \{ \iota(\alpha), \iota(\beta) \} = \{ \text{norm} \iota(\alpha), \beta \} = \{ \alpha, \beta \}^r$$

показывает, что любой элемент группы $(K_2F)^r$ лежит в образе $\iota^* K_2E$.

Предположим, наконец, что степень d поля E над F взаимно проста с числом корней из единицы в F .

Приведенное выше рассуждение показывает, что любой элемент группы $(K_2F)^d$ принадлежит ι^*K_2E . Но $K_2F = (K_2F)^d$ в силу П. 14.

Остается учесть, что любое конечное расширение поля F может быть представлено в виде башни $F = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_k = E$, каждый этаж $F_{i+1} \supset F_i$ которой удовлетворяет одному из трех разобранных условий. Это завершает доказательство. ■

Функтор K_2^{top}

Предыдущие результаты можно изложить более сжато, если ввести группу $K_2^{\text{top}}\Lambda$, связанную с топологическим кольцом Λ . К сожалению, не вполне ясно, в какой общности эту группу естественно определять.

Пусть G — хаусдорфова топологическая группа. Напомним (п. 11.4), что центральное расширение

$$1 \rightarrow C \xrightarrow{\iota} X \xrightarrow{\psi} G \rightarrow 1$$

называется *топологическим*, если C и X — хаусдорфовы топологические группы, гомоморфизм ι непрерывен и замкнут, а гомоморфизм ψ непрерывен и открыт. Такое центральное топологическое расширение называется *универсальным*, если для любого другого топологического центрального расширения $1 \rightarrow C' \rightarrow X' \rightarrow G \rightarrow 1$ существует единственный непрерывный гомоморфизм из X в X' над G . Если универсальное центральное топологическое расширение существует, то его ядро C мы будем обозначать через $\Pi_1 G$ и говорить просто, что $\Pi_1 G$ *существует*. Очевидно, если группа $\Pi_1 G$ существует, она является хаусдорфовой топологической коммутативной группой. (Ср. Moore C. C., Group extensions of p -adic and adelic linear groups, *Publ. Math. IHES*, 35 (1968), 5—70, стр. 13. Я не знаю, совпадает ли группа Мура π_1 с нашей Π_1 .)

Если группа $\Pi_1 G$ определена, то рассуждение, подобное приведенному в п. 5.5, показывает, что коммутант $[G, G]$ должен быть плотен в G .

Мы хотели бы определить $K_2^{\text{top}}\Lambda$ для любого топологического кольца Λ как прямой предел при $n \rightarrow \infty$ групп $\Pi_1 E(n, \Lambda)$. Здесь топология на $E(n, \Lambda)$ инду-

цирована топологией на $GL(n, \Lambda)$, которая в свою очередь топологизирована как множество пар всех матриц A, B размера $n \times n$ с условием $AB = BA = I$. Вот один случай, когда этот подход разумен.

ЛЕММА П. 16. Пусть Λ коммутативное хаусдорфово топологическое кольцо (т. е. с непрерывным сложением и умножением). Предположим также, что группа единиц Λ^* является открытым подмножеством кольца Λ с непрерывным делением. Тогда при $n \geq 3$ группа $E(n, \Lambda)$ обладает универсальным топологическим центральным расширением.

Таким образом, определена топологическая группа $\Pi_1 E(n, \Lambda)$ и определен прямой предел этих групп

$$K_2^{\text{top}} \Lambda = \varinjlim \Pi_1 E(n, \Lambda).$$

Можно надеяться, что $K_2^{\text{top}} \Lambda$ с топологией прямого предела является хаусдорфовой топологической группой.

Доказательство П. 16. Действуя, как в п. 7.4, нетрудно построить такую окрестность N единицы I в $SL(n, \Lambda)$, что любой ее элемент A представляется в виде произведения $n^2 + 5n - 6$ элементарных матриц, каждая из которых непрерывно зависит от A . Пусть $\hat{E}$ — универсальное центральное расширение группы $E(n, \Lambda)$. Подняв каждую элементарную матрицу в $\hat{E}$, как в п. 5.10 и п. 11.4, мы получим сечение

$$s: N \rightarrow \hat{E}.$$

Обозначим через $\mathcal{T}$ слабейшую топологию на $\hat{E}$, в которой

- (1) сечение s непрерывно;
- (2) умножение $\hat{E} \times \hat{E} \rightarrow \hat{E}$ непрерывно;
- (3) обращение $e \mapsto e^{-1}$ на $\hat{E}$ непрерывно.

Точнее, возьмем в качестве базы для $\mathcal{T}$ всевозможные конечные пересечения $U_1 \cap \dots \cap U_k$, где U_i — множество, открытое в некоторой топологии, удовлетворяющей (1), (2) и (3). Нетрудно проверить, что и топология $\mathcal{T}$ тогда удовлетворяет этим условиям.

Разумеется, топология $\mathcal{T}$, вообще говоря, не хаусдорфова. Чтобы поправить дело, перейдем к факторгруппе $X = \hat{E}/(\text{замыкание } 1)$. Тогда X становится хаусдорфовой топологической группой. (Ср. Бурбаки Н., Общая топология, «Наука», 1969, гл. III, § 2, п. 6. Сюръективное отображение

$$X \rightarrow E(n, \Lambda)$$

и будет нужным универсальным топологическим центральным расширением. Остальные детали мы оставляем читателю. ■

В случае топологического поля F данное выше определение $K_2^{\text{top}}F$ приобретает дополнительное оправдание. Назовем символ Стейнберга $s: F^\bullet \times F^\bullet \rightarrow A$ *строго непрерывным*, если s непрерывен как функция от двух переменных и удовлетворяет условию Мацумото $\lim_{u, v \rightarrow 0} s(u, v) = 1$ и если группа значений A является хаусдорфовой коммутативной топологической группой.

(В изученном ранее случае локально компактных полей слабая непрерывность, очевидно, влечет за собой строгую непрерывность, если A снабдить дискретной топологией.)

Лемма П. 17. Пусть F — хаусдорфово топологическое поле (с непрерывным сложением, умножением и делением). Тогда топологические группы $\Pi_1 E(n, \Lambda)$ канонически изоморфны друг другу (при всех $n \geq 5$) и своему прямому пределу $K_2^{\text{top}}F$. Естественное спаривание

$$u, v \mapsto \{u, v\}^{\text{top}}$$

из $F^\bullet \times F^\bullet$ в $K_2^{\text{top}}F$ строго непрерывно. Любой другой строго непрерывный символ Стейнберга $s: F^\bullet \times F^\bullet \rightarrow A$ является образом символа $\{u, v\}^{\text{top}}$ при непрерывном гомоморфизме $K_2^{\text{top}}F \rightarrow A$.

Доказательство. Это немедленное следствие теоремы Мацумото 11.4. ■

Таким образом, если F — локальное поле или поле вещественных чисел, содержащее m корней из единицы,

то символ норменного вычета $(u, v)_F$ степени m определяет изоморфизм

$$K_2^{\text{top}} F \cong \mu_m.$$

(Ср. П. 1 и П. 14.) С другой стороны, мы видим, что для поля C комплексных чисел группа $K_2^{\text{top}} C$ тривиальна.

Эти утверждения можно несколько усилить, воспользовавшись следующей леммой.

Лемма П. 18. Пусть F_0 — плотное подполе топологического поля F . Тогда $K_2^{\text{top}} F_0$ — плотная подгруппа в $K_2^{\text{top}} F$.

Если теперь F локально компактно, то группа $K_2^{\text{top}} F$ дискретна, откуда следует, что $K_2^{\text{top}} F_0 = K_2^{\text{top}} F$.

Доказательство. Согласно Бурбаки Н., Общая топология, гл. III, § 6, п. 5, спаривание $u, v \mapsto \{u, v\}^{\text{top}}$ из $F_0^\times \times F_0^\times$ в $K_2^{\text{top}} F_0$ продолжается до непрерывного билинейного спаривания

$$c: F^\times \times F^\times \rightarrow A,$$

где A означает «пополнение» топологической группы $K_2^{\text{top}} F_0$. Так как хаусдорфова топологическая группа обязательно регулярна, нетрудно проверить, что c — строго непрерывный символ Стейнберга. Следовательно, c определяет непрерывный гомоморфизм $c': K_2^{\text{top}} F \rightarrow A$. Продолжим теперь c' на пополнение B группы $K_2^{\text{top}} F$. Так как композиция $A \rightarrow B \rightarrow A$ является тождественным отображением, а образ A , очевидно, плотен в B , отсюда следует, что $A \cong B$, чем и завершается доказательство. ■

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Автоморфизм Фробениуса 164
Артиново кольцо 18
- Банахова алгебра 67
Брауэра группа 156
Брюа нормальная форма 87, 123
- Веддерберна теорема 155, 156
Вейерштрасса функция 92
Векторное расслоение 71
Ветвления индекс 178, 179
Взаимности законы 113, 115, 168
Вырезание 64—66
- Гильберта символ 103, 119
Гомологий группа H_2 57
Гомоморфизм переноса 148, 190
Группа Брауэра 156
— гомологий H_2 57
— классов идеалов 19, 20, 24, 41
— Пикара 25
— проективных модулей 13
— совершенная 54
— Стейнберга St 50, 51, 58, 63, 90
— Уайтхеда 36
- Дедекиндово кольцо (область) 19, 28, 49, 66, 133
Дирихле теорема обобщенная 174
Дискретное нормирование 106
Дубль кольца 44
- Единицы 15
- Законы взаимности 113, 115, 168
- Индекс ветвления 178, 179
- Китайская теорема об остатках 23
Класс проективных модулей 17
Классов идеалов группа 19, 20, 24, 41
- Коммутатор 36, 47, 50, 59, 72
Кольцо нормирования 106
Конгруэнц-подгруппа 10, 11, 45, 48, 49
Круговое поле 40—43
Куботы — Басса теорема 145
- Локальное кольцо 15
— поле 162, 178, 187—190
- Менникке символ 134
— функция 145
Модуль обратимый 25
— проективный 13
Мономиальная матрица 80
Мультипликатор Шура 58
- Несчетное поле 117
Норма 148
Нормальная форма Брюа 87, 123
Норменного вычета символ 103, 162—165, 188
Нормирование 106
Нормирования кольцо 106
- Ограничение кольца 148
Отмеченная единица 185
Относительное число классов 41
- Переноса гомоморфизм 148, 190
Пикара группа 25
Поле классов вычетов 107
Представления конкретных групп образующими и соотношениями 50, 89, 102
Примитивный корень из единицы 155
Проективный модуль 13
Проективных модулей группа 13
— — класс 17
Произведения в K -теории 14, 38, 44, 62, 76
Просто транзитивное действие 127

- Ранг проективного модуля 17
 Расщепимое расширение 54
 Решетка 25, 92
 Ручной символ 107
- Символ Гильберта 103, 113
 — Менникке 134
 — норменного вычета 103, 162—165, 188
 — Стейнберга 73, 83, 103, 106, 156, 177
- Совершенная группа 54
 Стабильный изоморфизм 13
 Стейнберга группа 50, 51, 58, 63, 90
 — символ 73, 83, 103, 106, 156, 177
 — — слабо непрерывный 177
 — — строго непрерывный 193
 — — универсальный непрерывный 108
- Теорема Веддерберна 155, 156
 — Дирихле обобщенная 174
 — единственности 169
 — Куботы — Басса 145
 Тождество Якоби 60
 Топологическое расширение групп 105, 191
- Точные последовательности в K -теории 8, 39, 44, 64—66, 133
- Уайтхеда группа 36
 Узел трилистника 91—93
 Универсальное топологическое центральное расширение 191
 — центральное расширение 54
 Универсальный непрерывный символ Стейнберга 99, 608
- Фробениуса автоморфизм 164
 Функция Вейерштрасса 92
- Целое алгебраическое число 20, 25
 Центральная простая алгебра 155
 Центральное расширение 54, 104
 Центры (конкретных групп) 47, 51
- Шура мультипликатор 58
- Элементарная матрица 36, 50, 125
- Якоби тождество 60

ОГЛАВЛЕНИЕ

От переводчика	5
Предисловие и путеводитель по литературе	7
§ 1. Проективные модули и $K_0\Lambda$	13
§ 2. Конструкция проективных модулей	30
§ 3. Группа Уайтхеда $K_1\Lambda$	36
§ 4. Точная последовательность, связанная с идеалом	44
§ 5. Группы Стейнберга и функтор K_2	50
§ 6. Продолжение точных последовательностей	63
§ 7. Случай коммутативной банаховой алгебры	67
§ 8. Умножение $K_1\Lambda \otimes K_1\Lambda \rightarrow K_2\Lambda$	72
§ 9. Вычисления в группе Стейнберга	80
§ 10. Вычисление $K_2\mathbb{Z}$	89
§ 11. Вычисление K_2 для поля по Мацумото	102
§ 12. Доказательство теоремы Мацумото	119
§ 13. Дополнительные сведения о дедекиндовых кольцах	133
§ 14. Гомоморфизм переноса	148
§ 15. Символы норменных вычетов	155
§ 16. Числовые поля	167
Приложение. Непрерывные символы Стейнберга	177
Предметный указатель	195

Уважаемый читатель!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., д. 2, издательство «Мир».

ДЖ. МИЛНОР

ВВЕДЕНИЕ В АЛГЕБРАИЧЕСКУЮ К-ТЕОРИЮ

Редактор Г. М. Цукерман

Художник А. Г. Антонова

Художественный редактор В. И. Шаповалов

Технический редактор А. Д. Хомяков

Сдано в набор 7/VI 1974 г. Подписано к печати
26/XI 1974 г. Бум. тип. № 3 $84 \times 108^{1/32} = 3,13$ бум. л.
10,5 усл. печ. л. Уч.-изд. л. 7,61. Изд. № 1/7380
Цена 54 коп. Зак. 227

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

Москва, 1-й Рижский пер., 2

Отпечатано в ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградской типографии № 2 имени Евгении Со-
коловой Союзполиграфпрома при Государствен-
ном комитете Совета Министров СССР по делам
издательств, полиграфии и книжной торговли,
198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29,
с матриц ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградского производственно-технического
объединения «Печатный Двор» имени А. М. Горь-
кого Союзполиграфпрома при Государственном
комитете Совета Министров СССР по делам
издательств, полиграфии и книжной торговли.
197136, Ленинград, П-136, Гатчинская ул., 26

В ИЗДАТЕЛЬСТВЕ «МИР»

в 1975 г. выйдет книга

Сулливан Д. Геометрическая топология, пер. с англ., 12 л.

— Книга написана на основе курса лекций по геометрической топологии, прочитанных видным американским математиком. В ней впервые в мировой литературе изложены результаты автора, обнаруживающие совершенно неожиданные связи между топологией и теорией чисел.

Эта книга будет интересна математикам, специализирующимся в области топологии и теории чисел. Как учебное пособие ее могут использовать студенты университетов и пединститутков, знакомые с основными понятиями топологии.

Заказы на эту книгу можно оформить в магазинах, торгующих научно-технической литературой.

54 коп.

В ИЗДАТЕЛЬСТВЕ «МИР» ВЫШЛИ СЛЕДУЮЩИЕ КНИГИ ДЖ. МИЛНОРА:

ТЕОРИЯ МОРСА, 1965

ТЕОРЕМА ОБ h -КОБОРДИЗМЕ, 1969

ОСОБЫЕ ТОЧКИ КОМПЛЕКСНЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ, 1971

А ТАКЖЕ КНИГА ДЖ. МИЛНОРА И А. УОЛЛЕСА

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ТОПОЛОГИЯ. НАЧАЛЬНЫЙ КУРС, 1972

